

Direction Provinciale : Khemisset

Lycée collégial Mohammed ELQOURI

Année Scolaire : 2019/2020

Matière : Mathématiques Niveau : 3APIC

Cours de l'ordre et opérations

prof : Yassin LAHSAINI

Remarque : tous les règles restent vrais avec les symboles $>$, $<$ et \geq .

I. Comparaison de deux nombres réels :

Règle 1 : Soient a et b deux nombres réels. Si $a-b \leq 0$ alors $a \leq b$. et si $a \leq b$ alors $a-b \leq 0$.

C'est-à-dire : Pour comparer deux nombres réels on étudie le signe de leur différence

Exemples :

a- Comparons les nombres $2\sqrt{3} - 4$ et $\sqrt{3} - 5$

On a $(2\sqrt{3} - 4) - (\sqrt{3} - 5) = 2\sqrt{3} - 4 - \sqrt{3} + 5 = \sqrt{3} - 4 + 5 = \sqrt{3} + 1 > 0$

alors : $2\sqrt{3} - 4 > \sqrt{3} - 5$

b- Comparons les nombres réels x et y tels : $x=y-3$

On a $x=y-3$ alors $x-y=-3 < 0$ d'où $x < y$

II. Ordre et opérations

1) Ordre et addition, ordre et soustraction :

Soient a, b et k trois nombres réels :

Si $a \leq b$ alors $a+k \leq b+k$ et $a-k \leq b-k$ et si $a+k \leq b+k$ ou $a-k \leq b-k$ alors $a \leq b$

Exemples :

Soit x un nombre réel tel que : $x \leq 3$. Comparons les nombres 8 et $x+5$.

On a $x \leq 3$ alors $x+5 \leq 3+5$ d'où $x+5 \leq 8$

Soit x un nombre réel tel que : $2x-3 \geq x+2$. Montrons que $x \geq 5$

On a $2x-3 \geq x+2$ alors $2x-3-x+3 \geq x+2-x+3$ d'où $x \geq 5$

2) Ordre et opposé :

Soient a et b deux nombres réels alors : Si $a \leq b$ alors $-a \geq -b$ et si $-a \geq -b$ alors $a \leq b$.

Exemples :

$12 > 9$ signifie que $-12 < -9$;; $-17 < -10$ signifie que $17 > 10$;; $2 > -5$ alors $-2 < 5$

3) Ordre et multiplication :

Soient a, b et k trois nombres réels

1ère cas : Si $k > 0$

Si $a \leq b$ alors $k \times a \leq k \times b$ et Si $k \times a \leq k \times b$ alors $a \leq b$

2ème cas : Si $k < 0$

$a \leq b$ alors $k \times a \geq k \times b$ et Si $k \times a \geq k \times b$ alors $a \geq b$

Exemples :

$45 < 200$ et $6 > 0$ alors $6 \times 45 < 6 \times 200$ d'où $270 < 1200$

$-45 > -200$ et $-\sqrt{3} < 0$ alors $-45 \times (-\sqrt{3}) < -200 \times (-\sqrt{3})$ d'où $45\sqrt{3} < 200\sqrt{3}$

4) L'Ordre et L'inverse :

Soient a et b deux nombres réels non nuls de même signe.

Si $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ et $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ alors $a \leq b$

Si $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ alors $a \leq b$ et si $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ alors $a \geq b$

Exemples :

$15 > 10$ alors $\frac{1}{15} < \frac{1}{10}$;; $11 < 25$ alors $\frac{1}{11} > \frac{1}{25}$;; $-2 > -20$ alors $\frac{1}{-2} < \frac{1}{-20}$

5) Ordre et carré

Soient a et b deux nombres réels positifs.

$a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$ et si $a^2 \leq b^2$ alors $a \leq b$

Soient a et b deux nombres réels négatifs.

$a \leq b$ alors $a^2 \geq b^2$ et si $a^2 \geq b^2$ alors $a \leq b$

Exemples

$5 \leq 11$ signifie que $5^2 \leq 11^2$ d'où $25 \leq 121$

On a $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$ et $(3\sqrt{7})^2 = 9 \times 7 = 63$ alors $(2\sqrt{3})^2 \leq (3\sqrt{7})^2$

Or $2\sqrt{3} \geq 0$ et $3\sqrt{7}$ alors $2\sqrt{3} \leq 3\sqrt{7}$

$9^2 \geq 7^2$ alors $9 \geq 7$

$(-9)^2 \geq (-7)^2$ alors $-9 \leq -7$

6) Ordre et racine carrée :

Soient a et b deux nombres réels positifs.

Si $a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ et si $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ alors $a \leq b$

Exemples

$7 < 11$ alors $\sqrt{7} < \sqrt{11}$

$25 \geq 24$ alors $\sqrt{25} \geq \sqrt{24}$ d'où $5 \geq \sqrt{4 \times 6}$ signifier $5 \geq 2\sqrt{6}$

III. Encadrement

1- **Définition :** Soient a, b et x trois nombres réels tels que $a < b$.

On appelle encadrement de x par a et b , toute écriture de la forme : $a \leq x \leq b$

2- Encadrement et opérations :

a- Encadrement et L'addition, Encadrement et soustraction :

Soient a, b, c, d, x et y des nombres réels : si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $a+c \leq x+y \leq b+d$

Remarque : pour encadrer x-y, encadre -y puis $x+(-y)$

Exemples : soient x et y deux réels tels que $3 \leq x \leq 11$ et $-11 \leq y \leq -3$ encadrer $x+y$ et $x-y$

On a $-11 \leq y \leq -3$ alors $3 \leq -y \leq 11$ d'où $3+(-11) \leq x+y \leq 11+(-3)$ c'est -à-dire $-8 \leq x+y \leq 8$

$3+3 \leq x+(-y) \leq 11+11$ c'est -à-dire $6 \leq x-y \leq 22$

b- Encadrement et La multiplication, Encadrement et La division

Soient a, b, c, d, x et y des nombres réels positifs : si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $ac \leq xy \leq bd$

Remarque : pour encadrer $\frac{x}{y}$, encadre $\frac{1}{x}$ puis $\frac{x}{y}$

Exemples

Soient x et z deux nombres réels tels que $3 \leq x \leq 11$ et $4 \leq z \leq 9$

$3 \times 4 \leq x \times z \leq 11 \times 9$ alors $12 \leq xz \leq 99$ et $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{4}$ d'où $3 \times \frac{1}{9} \leq x \times \frac{1}{z} \leq 11 \times \frac{1}{4}$

C'est-à-dire $\frac{1}{3} \leq \frac{x}{z} \leq \frac{11}{4}$

Applications : $3 \leq x \leq 11$; $-11 \leq y \leq -3$; $-25 \leq z \leq 2$ et $4 \leq t \leq 9$

Comparons : $x+y$; $x-z$; $x \times t$; xy ; $\frac{x}{t}$; x^2 ; y^2 ; \sqrt{t} ; $6x$ et $-7y$