

Direction Provinciale : Khemisset

Année Scolaire : 2019/2020

Cours de l'ordre et opérations

**Remarque : tous les règles restent vraies avec les symboles >, < et ≥.**

### I. Comparaison de deux nombres réels :

**Règle 1 :** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels. Si  $a-b \leq 0$  alors  $a \leq b$ . et si  $a \leq b$  alors  $a-b \leq 0$ .

**C'est-à-dire :** Pour comparer deux nombres réels on étudie le signe de leur différence

#### Exemples :

a- Comparons les nombres  $2\sqrt{3} - 4$  et  $\sqrt{3} - 5$

$$\text{On a } (2\sqrt{3} - 4) - (\sqrt{3} - 5) = 2\sqrt{3} - 4 - \sqrt{3} + 5 = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 4 + 5 = \sqrt{3} + 1 > 0$$

alors :  $2\sqrt{3} - 4 > \sqrt{3} - 5$

b- Comparons les nombres réels  $x$  et  $y$  tels :  $x=y-3$

On a  $x=y-3$  alors  $x-y=-3 < 0$  d'où  $x < y$

### II. Ordre et opérations

#### 1) Ordre et addition, ordre et soustraction :

Soient  $a$ ,  $b$  et  $k$  trois nombres réels :

Si  $a \leq b$  alors  $a+k \leq b+k$  et  $a-k \leq b-k$  et si  $a+k \leq b+k$  ou  $a-k \leq b-k$  alors  $a \leq b$

#### Exemples :

Soit  $x$  un nombre réel tel que :  $x \leq 3$ . Comparons les nombres  $8$  et  $x+5$ .

On a  $x \leq 3$  alors  $x+5 \leq 3+5$  d'où  $x+5 \leq 8$

Soit  $x$  un nombre réel tel que :  $2x-3 \geq x+2$ . Montrons que  $x \geq 5$

On a  $2x-3 \geq x+2$  alors  $2x-3-x+3 \geq x+2-x+3$  d'où  $x \geq 5$

#### 2) Ordre et opposé :

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels alors : Si  $a \leq b$  alors  $-a \geq -b$  et si  $-a \geq -b$  alors  $a \leq b$ .

#### Exemples :

$12 > 9$  signifier que  $-12 < -9$ ;  $-17 < -10$  signifier que  $17 > 10$ ;  $2 > -5$  alors  $-2 < 5$

#### 3) Ordre et multiplication :

Soient  $a$ ,  $b$  et  $k$  trois nombres réels

##### 1ère cas : Si $k > 0$

Si  $a \leq b$  alors  $k \times a \leq k \times b$  et Si  $k \times a \leq k \times b$  alors  $a \leq b$

##### 2ème cas : Si $k < 0$

$a \leq b$  alors  $k \times a \geq k \times b$  et Si  $k \times a \geq k \times b$  alors  $a \geq b$

#### Exemples :

$45 < 200$  et  $6 > 0$  alors  $6 \times 45 < 6 \times 200$  d'où  $270 < 1200$

$-45 > -200$  et  $-\sqrt{3} < 0$  alors  $-45 \times (-\sqrt{3}) < -200 \times (-\sqrt{3})$  d'où  $45 \times \sqrt{3} < 200 \sqrt{3}$

#### 4) L'Ordre et L'inverse :

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels non nuls de même signe.

Si  $a \leq b$  alors  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$  et  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$  alors  $a \leq b$

Si  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$  alors  $a \leq b$  et si  $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$  alors  $a \geq b$

#### Exemples :

Lycée collégial Mohammed ELQOURI

Matière : Mathématiques Niveau : 3APIC

prof : Yassin LAHSAINI

$15 > 10$  alors  $\frac{1}{15} < \frac{1}{10}$ ;  $11 < 25$  alors  $\frac{1}{11} > \frac{1}{25}$ ;  $-2 > -20$  alors  $\frac{1}{-2} < \frac{1}{-20}$

#### 5) Ordre et carré

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels positifs.

$a \leq b$  alors  $a^2 \leq b^2$  et si  $a^2 \leq b^2$  alors  $a \leq b$

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels négatifs.

$a \leq b$  alors  $a^2 \geq b^2$  et si  $a^2 \geq b^2$  alors  $a \leq b$

#### Exemples

$5 \leq 11$  signifie que  $5^2 \leq 11^2$  d'où  $25 \leq 121$

On a  $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$  et  $(3\sqrt{7})^2 = 9 \times 7 = 63$  alors  $(2\sqrt{3})^2 \leq (3\sqrt{7})^2$

Or  $2\sqrt{3} \geq 0$  et  $3\sqrt{7} \geq 0$  alors  $2\sqrt{3} \leq 3\sqrt{7}$

$9^2 \geq 7^2$  alors  $9 \geq 7$

$(-9)^2 \geq (-7)^2$  alors  $-9 \leq -7$

#### 6) Ordre et racine carrée :

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels positifs.

Si  $a \leq b$  alors  $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$  et si  $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$  alors  $a \leq b$

#### Exemples

$7 < 11$  alors  $\sqrt{7} < \sqrt{11}$

$25 \geq 24$  alors  $\sqrt{25} \geq \sqrt{24}$  d'où  $5 \geq \sqrt{4 \times 6}$  signifier  $5 \geq 2\sqrt{6}$

### III. Encadrement

#### 1- Définition : Soient $a$ , $b$ et $x$ trois nombres réels tels que $a < b$ .

On appelle encadrement de  $x$  par  $a$  et  $b$ , toute écriture de la forme :  $a \leq x \leq b$

#### 2- Encadrement et opérations :

##### a- Encadrement et L'addition, Encadrement et soustraction :

Soient  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $x$  et  $y$  des nombres réels : si  $a \leq x \leq b$  et  $c \leq y \leq d$  alors  $a+c \leq x+y \leq b+d$

**Remarque :** pour encadrer  $x-y$ , encadre  $-y$  puis  $x+(-y)$

**Exemples :** soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $3 \leq x \leq 11$  et  $-11 \leq y \leq -3$  encadrer  $x+y$  et  $x-y$

On a  $-11 \leq y \leq -3$  alors  $3 \leq -y \leq 11$  d'où  $3+(-11) \leq x+y \leq 11+(-3)$  c'est-à-dire  $-8 \leq x+y \leq 8$

$3+3 \leq x+(-y) \leq 11+11$  c'est-à-dire  $6 \leq x-y \leq 22$

##### b- Encadrement et La multiplication, Encadrement et La division

Soient  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $x$  et  $y$  des nombres réels positifs : si  $a \leq x \leq b$  et  $c \leq y \leq d$  alors  $ac \leq xy \leq bd$

**Remarque :** pour encadrer  $\frac{x}{y}$ , encadre  $\frac{1}{y}$  puis  $\frac{x}{\frac{1}{y}}$

#### Exemples

Soient  $x$  et  $z$  deux nombres réels tels que  $3 \leq x \leq 11$  et  $4 \leq z \leq 9$

$3 \times 4 \leq x \times z \leq 11 \times 9$  alors  $12 \leq xz \leq 99$  et  $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{4}$  d'où  $3 \times \frac{1}{9} \leq x \frac{1}{z} \leq 11 \times \frac{1}{4}$

C'est-à-dire  $\frac{1}{3} \leq \frac{x}{z} \leq \frac{11}{4}$

**Applications :**  $3 \leq x \leq 11$ ;  $-11 \leq y \leq -3$ ;  $-25 \leq z \leq 2$  et  $4 \leq t \leq 9$

Comparons :  $x+y$ ;  $x-z$ ;  $x \times t$ ;  $xy$ ;  $\frac{x}{t}$ ;  $x^2$ ;  $y^2$ ;  $\sqrt{t}$ ;  $6x$  et  $-7y$