ORDRE ET OPÉRATIONS

4

Objectifs d'apprentissage

- Comparer deux nombres relatifs.
- Maîtriser les propriétés de l'ordre et des opérations.
- Ecrire un encadrement d'un nombre relatif.
- Utiliser les propriétés de l'ordre dans la résolution des problèmes.

Prérequis

- Comparer deux nombres rationnels.
- Utiliser les propriétés de l'ordre et l'addition.
- Utiliser les propriétés de l'ordre et la multiplication par un nombre positif.

Gestion du temps

- 12 heures

Outils didactiques

- Tableau.
- Livre scolaire.

- **Pr :** Abdelilah BOUTAYEB
- **Niveau :** 3ème APIC
- **Matière :** Mathématiques
- **Etablissement :** Collège Nahda

Activités

Activité 1: 1) Compléter le tableau ci-dessous :

a	b	Comparaison de a et b	a-b	Signe de a-b
4	5			
3	-2			
-5	-8			
-7,5	-2,3			

2) A l'aide du tableau, compléter par : $<$ *ou* $>$

* Si : $a - b < 0$ alors $a \dots b$

* Si : $a - b > 0$ alors $a \dots b$

Activité 2 : a, b et c sont des nombres réels tel que a> b.

1) calculer la différence de a + c et b + c.

2) Déduis-en la comparaison de a + c et b + c.

3) compare a - c et b – c en procédant de la même façon.

4) Enonce les règles que tu viens de démontrer.

Contenu de la leçon

I- Comparaison de deux nombres réels :

*** Propriété :** Soient a *et* b deux nombres réels :

- Si $a - b < 0$ alors $a < b$
- Si $a - b > 0$ alors $a > b$
- Si $a - b = 0$ alors $a = b$

*** Exemple :** * On compare : $\frac{3}{5}$ *et* $\frac{6}{7}$

On a : $\frac{3}{5} - \frac{6}{7} = \frac{21}{35} - \frac{30}{35} = \frac{-9}{35}$

Puisque : $\frac{-9}{35} < 0$

Alors : $\frac{3}{5} < \frac{6}{7}$

II- Ordre et opérations :

1) Ordre et addition – ordre et soustraction :

*** Propriété :** Soient a, b *et* c trois nombres réels :

- Si $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ alors $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} < \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$
- Si $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ alors $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} < \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$

*** Exemple :** * On compare : $3 + \sqrt{7}$ *et* $8 + \sqrt{7}$

On a : $3 < 8$ alors $3 + \sqrt{7} < 8 + \sqrt{7}$

** Si $x > 3$, comparer : $x - 5$ *et* -2

On a $x > 3$ alors $x - 5 > 3 - 5$, donc $x - 5 > -2$

*** Propriété :** Soient a, b, c *et* d des nombres réels :

- Si $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases}$ alors $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} < \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}$

*** Exemple :** * a et b deux nombres réels tel que $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{4}$ *et* $\boldsymbol{3} > \boldsymbol{b}$.

Evaluation

Exercice 1: Comparer les nombres suivants :

1) $a = \frac{4}{7}$ *et* $b = \frac{-5}{6}$

2) $a = \frac{3}{2}$ *et* $b = \frac{4}{5}$

3) $a = \frac{-2}{5}$ *et* $b = \frac{-3}{4}$

4) $a = \sqrt{3} - 4$ *et* $b = \sqrt{3} - 5$

5) $a = -3\sqrt{2} - 1$ *et* $b = \sqrt{2} + 7$

Exercice 2 : Soient a *et* b deux nombres réels tels que : $a \geq -8$ *et* $b \geq 5$

Montrer que :

1) $a + 4 \geq -4$

2) $b - \frac{1}{2} \geq \frac{9}{2}$

3) $a + b \geq -3$

Exercice 3 : Compléter :

$x > 6$ $x + 1 > \dots$	$x > 6$ $x + 7 > \dots$	$x > 6$ $x - 4 > \dots$
$x \geq -4$ $x + 1 \dots$	$x \geq -4$ $x + 7 \dots$	$x \geq -4$ $x - 4 \dots$
$x > 5$ $2x > \dots$	$x > 8$ $\frac{1}{2} x > \dots$	$x > -12$ $\frac{3}{4} x > \dots$

Activités	Contenu de la leçon	Evaluation

Activité 3 : ***activité : 6 – page : 43***

Activité 4 : *1)* Compléter le tableau ci-dessous :

a	b	a<b ou a>b	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ ou $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
2	8				
-5	-10				

2) Enoncer la propriété que tu viens de démonter.

Montrer que : $\boldsymbol{a+b<7}$.

On a : $\begin{cases} a<4 \\ b<3 \end{cases}$ alors $\boldsymbol{a+b<4+3}$ donc $\boldsymbol{a+b<7}$.

2) Ordre et multiplication :

*** Propriété :** Soient a, b *et* c des nombres réels :

- Si $\begin{cases} a<b \\ c>0 \end{cases}$ alors $\boldsymbol{a\times c<b\times c}$
- Si $\begin{cases} a<b \\ c<0 \end{cases}$ alors $\boldsymbol{a\times c>b\times c}$

*** Exemple :** * Soit x un nombre réel tel que $\boldsymbol{x<3}$. Comparons $-4x$ *et* -12.

On a : $\begin{cases} x<3 \\ -4<0 \end{cases}$ alors $\boldsymbol{-4\times x>-4\times 3}$ donc $\boldsymbol{-4x>-12}$.

*** Remarque :** Soient a *et* b deux nombres réels :

- Si $\boldsymbol{a<b}$ alors $\boldsymbol{-a>-b}$

*** Propriété :** Soient a, b, c *et* d des nombres réels ***positifs*** :

- Si $\begin{cases} a<b \\ c<d \end{cases}$ alors $\boldsymbol{a\times c<b\times d}$

*** Exemple :** * Soit x *et* y deux nombre réels positifs tel que $x<\sqrt{3}$ *et* $y<2\sqrt{6}$. Montrer que : $xy<6\sqrt{2}$.

On a : $\begin{cases} x<\sqrt{3} \\ y<2\sqrt{6} \end{cases}$ alors $\boldsymbol{x\times y<\sqrt{3}\times 2\sqrt{6}}$ donc $\boldsymbol{xy<2\sqrt{18}}$

Puisque : $2\sqrt{18}=2\sqrt{9\times 2}=2\sqrt{9}\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

Alors : $\boldsymbol{xy<6\sqrt{2}}$.

3) Ordre et inverse :

Exercice 4 : Compléter :

$x<12$ $x+4<$	$x<5$ $x-1<$	$x<13$ $x-14<$ .....
$x\geq 2$ $3x$	$x\geq 5$ $-2x$	$x\geq -4$ $5x$ ....
$x>3$ $-x$	$x>-4$ $7x$	$x>18$ $0,5x$ ....

Exercice 5 : Comparer les nombres suivants :

1) $a=\sqrt{8}$ *et* $b=3$
2) $a=3\sqrt{5}$ *et* $b=\sqrt{37}$
3) $a=2\sqrt{5}$ *et* $b=5$
4) $a=2\sqrt{3}$ *et* $b=3\sqrt{2}$
5) $a=\sqrt{5}$ *et* $b=\sqrt{2}+\sqrt{3}$
6) $a=6+\sqrt{3}$ *et* $b=6+\sqrt{5}$
7) $a=20\sqrt{2}$ *et* $b=-7\sqrt{14}$
8) $a=-\sqrt{3}$ *et* $b=-2\sqrt{10}$
9) $a=-10\sqrt{2}$ *et* $b=-9\sqrt{3}$
10) $a=2+2\sqrt{2}$ *et* $b=2+\sqrt{10}$
11) $a=2\sqrt{3}+\sqrt{11}$ *et* $b=\sqrt{11}+\sqrt{10}$
12) $a=1+\sqrt{6}$ *et* $b=\sqrt{2}+\sqrt{3}$
13) $a=\sqrt{17}-\sqrt{11}$ *et* $b=\sqrt{5}-\sqrt{40}$
14) $a=3+\sqrt{3}$ *et* $b=\sqrt{27}+1$

Activités

Activité 5 : **A-** a et b deux nombres réels positifs

1) *démontrer que le signe de $a^2 - b^2$ est le meme signe de $a - b$*

2) *démontere que si $a \leq b$ donc $a^2 \leq b^2$*

B- a et b sont deux réels négatifs

1) *démontrer que le signe de $a^2 - b^2$ est le signe contraire de $a - b$*

2) *démontere que si $a \leq b$ donc $a^2 \geq b^2$*

Contenu de la leçon

*** Propriété :** Soient a et b deux nombres réels :

- Si $a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

*** Exemple :** * On a : $2 < 8$ *alors* $\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$

* On a : $-10 < -5$ *alors* $\frac{1}{-10} > \frac{1}{-5}$

4) Ordre et carré :

*** Propriété :** Soient a et b deux nombres réels ***positifs*** :

- Si $a < b$ alors $a^2 < b^2$.
- Si $a^2 < b^2$ alors $a < b$.

*** Propriété :** Soient a et b deux nombres réels ***négatifs*** :

- Si $a < b$ alors $a^2 > b^2$.
- Si $a^2 > b^2$ alors $a < b$.

*** Exemple :** * Comparons : $3\sqrt{5}$ *et* $\sqrt{41}$

$On\ a : \begin{cases} (3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45 \\ (\sqrt{41})^2 = 41 \end{cases}$ donc : $(3\sqrt{5})^2 > (\sqrt{41})^2$

Puisque $3\sqrt{5}$ *et* $\sqrt{41}$ deux nombres positifs, alors : $3\sqrt{5} > \sqrt{41}$.

5) Ordre et racine carré :

*** Propriété :** Soient a et b deux nombres réels ***positifs*** :

- Si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- Si $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ alors $a < b$.

*** Exemple :** * Comparons : $\sqrt{15}$ *et* $\sqrt{19}$

Puisque : $15 < 19$ *alors* $\sqrt{15} < \sqrt{19}$

Evaluation

Exercice 6 : 1) Comparer les nombres $7\sqrt{2}$ et $5\sqrt{3}$ puis déduire la comparaison des nombres $\frac{1}{7\sqrt{2}}$ *et* $\frac{1}{5\sqrt{3}}$

2) Comparer les nombres $5\sqrt{2}$ et $4\sqrt{3}$ puis déduire la comparaison des nombres $\sqrt{4\sqrt{3}+7}$ *et* $\sqrt{5\sqrt{2}+7}$.

Exercice 7 : 1) Comparer les nombres : $\frac{13}{5}$ *et* $\frac{12}{7}$

2) Déduire la comparaison de : $\frac{13}{5} \times (-3)^{11}$ *et* $\frac{12}{7} \times (-3)^{11}$.

3) Comparer les nombres : $3\sqrt{3}$ *et* $\sqrt{11} + 4$

4) Déduire la comparaison de : $\frac{1}{3\sqrt{3}} - \sqrt{10}$ *et* $\frac{1}{\sqrt{11}+4} - \sqrt{10}$

Activités	Contenu de la leçon	Evaluation

Activités

Activité 6 : Soient a, b, x, y, z et t des nombres réels tels que :

$x \leq a \leq y$ et $z \leq b \leq t$

1) Montrer que : $a + b \leq y + t$

Et $x + z \leq a + b$

2) En déduire un encadrement de :

$a + b$

3) Démontrer que $-t \leq -b$

$et\ -b \leq -z$

4) déduire un encadrement de –b

5) déduire l'encadrement de a-b

(remarquer que a-b=a+(-b))

Contenu de la leçon

III- Encadrement :

1) Encadrement et addition :

*** Propriété :** Soient $a, b, c, d, x\ et\ y$ des nombres réels :

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ alors $a + c \leq x + y \leq b + d$.

*** Exemple :** * $x\ et\ y$ deux nombres réels tels que : $3 \leq x \leq 8\ \ et$ $-4 \leq y \leq 2$. Encadrer : $x + y$.

On a : $\begin{cases} 3 \leq x \leq 8 \\ -4 \leq y \leq 2 \end{cases}$ donc : $3 + (-4) \leq x + y \leq 8 + 2$,

alors : $-1 \leq x + y \leq 10$

2) Encadrement et opposé :

*** Propriété :** Soient $a, b\ et\ x$ des nombres réels :

Si $a \leq x \leq b$ alors $-b \leq -x \leq -a$.

*** Exemple :** * $x\ et\ y$ deux nombres réels tels que : $2 \leq x \leq 7\ \ et$ $-1 \leq y \leq 5$. Encadrer : $-x\ et\ -y$.

$\Longrightarrow On\ a : 2 \leq x \leq 7\ alors : \ -7 \leq -x \leq -2.$

$\Longrightarrow On\ a : -1 \leq y \leq 5\ alors : \ -5 \leq -y \leq 1.$

3) Encadrement et soustraction :

*** Propriété :** Soient $a, b, c, d, x\ et\ y$ des nombres réels :

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ alors $a - d \leq x - y \leq b - c$.

*** Exemple :** * $x\ et\ y$ deux nombres réels tels que : $2 \leq x \leq 7\ \ et$ $-1 \leq y \leq 5$. Encadrer : $x - y$.

On a : $\begin{cases} 2 \leq x \leq 7 \\ -1 \leq y \leq 5 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} 2 \leq x \leq 7 \\ -5 \leq -y \leq 1 \end{cases}$,

alors : $2 + (-5) \leq x + (-y) \leq 7 + 1$, d'où : $-3 \leq x - y \leq 8$

Evaluation

Exercice 8 : x et y deux nombres réels tel que : $2 \leq x \leq 5\ \ et\ \ 1 \leq y \leq 4$

Encadrer :

$x + 5\ ;\ \ 3x\ ;\ \ -5y\ ;\ \ y - 3\ ;\ \ xy\ ;$

$\frac{1}{x}\ ;\ \ \frac{1}{y}\ ;\ \ x + y\ ;\ \ x - y\ ;\ \ \frac{1}{x+y}\ ;$

$\frac{x - y}{x + y}\ ;\ \ 2x + y\ ;\ -4x + 3y\ ;\ \ 3x - 2y$

Activités

Activité 7 : **A-** Soient a, b, x, y, z et t des nombres réels tels que : $(a > 0 \quad et \quad b > 0)$

$x \le a \le y$ et $z \le b \le t$

1) Montrer que : $a \times b \le y \times t$ Et $x \times z \le a \times b$

2) En déduire l'encadrement de : $a \times b$

3) On considère que b<0, montrer que $a \times b \le y \times z \quad et \quad x \times t \le a \times b$

B- On considère que $a \neq 0$ et $x \neq 0 \; et \; y \neq 0$

4) Montrer que $\frac{1}{a} \le \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y} \le \frac{1}{a}$

5) Déduire l'encadrement de $\frac{1}{a}$

On considère que $b \neq 0 \; et$ $t \neq 0 \; et \; z \neq 0$

6) Donner l'encadrement de $\frac{1}{b}$

7) Déduire l'encadrement de $\frac{a}{b}$

Contenu de la leçon

4) Encadrement et multiplication :

*** Propriété :** Soient a, b, c, d, x et y des nombres réels ***positifs*** :

Si $\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$ alors $ac \le xy \le bd$.

*** Exemple :** * x et y deux nombres réels tels que : $1 \le x \le 7 \quad et$ $4 \le y \le 6$. Encadrer : xy.

On a : $\begin{cases} 1 \le x \le 7 \\ 4 \le y \le 6 \end{cases}$ donc : $1 \times 4 \le x \times y \le 7 \times 6$, alors : $4 \le xy \le 42$

5) Encadrement et inverse :

*** Propriété :** Soient a, b et x des nombres réels ***positifs*** :

Si $a \le x \le b$ alors $\frac{1}{b} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{a}$.

*** Exemple :** * x un nombre réel tel que : $5 \le x \le 9$. Encadrer : $\frac{1}{x}$.

On a : $5 \le x \le 9 \; alors : \; \frac{1}{9} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{5}$

6) Encadrement et carré, encadrement et racine carrée :

*** Propriété :** Soient a, b et x des nombres réels ***positifs*** :

Si $a \le x \le b$ alors $a^2 \le x^2 \le b^2$ ***et*** $\sqrt{a} \le \sqrt{x} \le \sqrt{b}$.

*** Exemple :** * x et y deux nombres réels tels que : $16 \le x \le 25 \quad et$ $-3 \le y \le -2$. Encadrer : $\sqrt{x}$ et y^2.

$\Longrightarrow On \; a : 16 \le x \le 25, donc : \; \sqrt{16} \le \sqrt{x} \le \sqrt{25}, alors : 4 \le \sqrt{x} \le 5$

$\Longrightarrow On \; a : -3 \le y \le -2, donc : \; 2 \le -y \le 3, donc : 2^2 \le (-y)^2 \le 3^2$

$Alors : 4 \le y^2 \le 9$

Evaluation

Exercice 9 : Soit a et b deux nombres réels tels que :

$$1 \le \frac{a-4}{2} \le \frac{3}{2} \quad et \quad -5 \le b \le -4$$

1) Montrer que : $6 \le a \le 7$

2) Encadrer les nombres : $a + b$; $a \times b$; $3a - 2b$

3) Montrer que : $\sqrt{2} \le \sqrt{\frac{a}{a+b}} \le \sqrt{7}$