Théorème de Pythagore

Exercice 1 :

Le triangle DEF est rectangle en F, DF = 36 mm, DE = 85 mm, calculer EF.

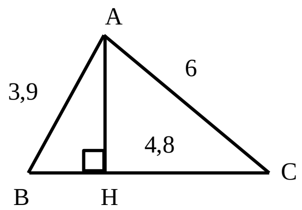
CORRIGE

Le triangle DEF est rectangle en F. D'après le théorème de Pythagore :

$$ED^2 = EF^2 + DF^2$$
$$85^2 = EF^2 + 36^2$$
$$EF^2 = 7225 - 1296$$
$$EF^2 = 5929$$
$$EF = \sqrt{5929} = 77\ mm$$

Exercice 2 :

Le triangle ABC a pour hauteur AH , $AB = 3,9\ cm$, $AC = 6\ cm$, $CH = 4,8\ cm$, calculer AH et BH, puis l'aire du triangle ABC.



CORRIGE

Le triangle AHC est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$AH^2 + HC^2 = AC^2$$
$$AH^2 + 4,8^2 = 6^2$$
$$AH^2 = 36 - 23,04$$
$$AH^2 = 12,96$$
$$AH = \sqrt{12,96} = 3,6\ cm$$

Le triangle AHB est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$AH^2 + BH^2 = AB^2$$
$$3,6^2 + BH^2 = 3,9^2$$
$$BH^2 = 15,21 - 12,96$$
$$BH^2 = 2,25$$
$$BH = \sqrt{2,25} = 1,5\ cm$$

L’aire d’un triangle est : $Aire = \dfrac{base \times hauteur}{2}$

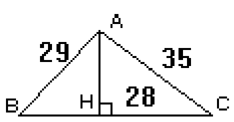
$$Aire_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2}$$
$$= \frac{(1,5 + 4,8) \times 3,6}{2}$$
$$= 11,34\ cm^2$$

Exercice 3 :

Le triangle ABC a pour hauteur AH, $AB = 29$, $AC = 35$, $CH = 28$.

Calculer AH et BH.

Calculer l'aire du triangle ABC.



CORRIGE

Le triangle AHC est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$AH^2 + HC^2 = AC^2$$
$$AH^2 + 28^2 = 35^2$$
$$AH^2 = 1225 - 784$$
$$AH^2 = 441$$
$$AH = \sqrt{441} = 21$$

Le triangle AHB est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$AH^2 + BH^2 = AB^2$$
$$HB^2 + 21^2 = 29^2$$
$$HB^2 = 29^2 - 21^2$$
$$HB^2 = 841 - 441 = 400$$
$$HB = \sqrt{400} = 20 \text{ cm.}$$

L'aire d'un triangle est : $Aire = \dfrac{base \times hauteur}{2}$

$$Aire_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2}$$
$$= \frac{(28+20) \times 21}{2}$$
$$= 504\ cm^2$$

Réciproque de l'énoncé de Pythagore

Exercice 4 :

Le triangle de côtés 11 cm, 13 cm et 7 cm est-il rectangle ?

CORRIGE

Le plus grand côté mesure 13 cm

On calcule :

$$13^2 = 169$$
$$11^2 + 7^2 = 121 + 49 = 170$$

$169 \neq 170$ donc la réciproque du théorème de Pythagore ne s'applique pas, le triangle de côtés 11 cm, 13 cm et 7 cm n'est pas rectangle.

Exercice 5 : Triangle non rectangle dans un rectangle

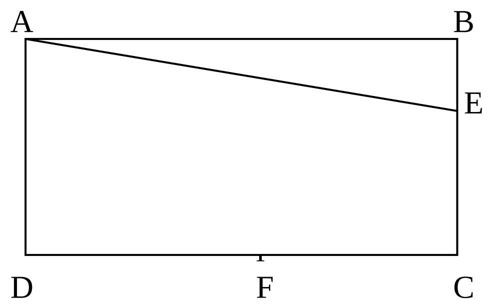
On construira la figure. On écrira le raisonnement pour chaque réponse

ABCD est un rectangle de côtés $AB = 12\ cm$ et $AD = 9\ cm$.

Sur le côté [BC] on place le point E tel que $AE = 13$ cm .

Sur le côté [DC] on place le point F tel que $DF = 5$ cm .

1) Calculer la longueur AF.
2) Calculer la longueur BE.
3) Calculer les longueurs CE et CF, puis la longueur EF.
4) Le triangle AFE est-il rectangle ?



CORRIGE

ABCD est un rectangle, donc ses angles sont droits.

1) Le triangle ADF est rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore :

$$AF^2 = AD^2 + DF^2$$
$$AF^2 = 9^2 + 5^2$$
$$AF^2 = 81 + 25$$
$$AF^2 = 106$$
$$AF = \sqrt{106}\ cm$$

2) Le triangle ABE est rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

$$AE^2 = AB^2 + BE^2$$
$$13^2 = 12^2 + BE^2$$
$$169 = 144 + BE^2$$
$$169 - 144 = BE^2$$
$$BE^2 = 25$$
$$BE = 5\ cm$$

3) E∈[BC] donc $CE = BC - EB = 9 - 5 = 4\ cm$

F∈[CD] donc $CF = CD - DF = 12 - 5 = 7\ cm$

Le triangle ECF est rectangle en C ; d'après le théorème de Pythagore :

$$EF^2 = EC^2 + CF^2$$
$$EF^2 = 4^2 + 7^2$$
$$EF^2 = 16 + 49 = 65$$
$$EF = \sqrt{65}\ cm$$

4) Dans le triangle AEF, AE est le plus grand côté,

$$AE^2 = 13^2 = 169$$
$$AF^2 + EF^2 = 106 + 65 = 171$$ (il faut prendre les valeurs exactes de AF^2 et EF^2)

donc $AE^2 \neq AF^2 + EF^2$

La réciproque du théorème de Pythagore ne s'applique pas, le triangle AEF n'est pas rectangle.

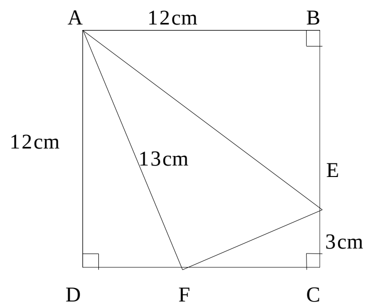
Exercice 6 : Triangle non rectangle dans un carré

ABCD est un carré de côté 12 cm.

Sur le côté [BC] on place le point E tel que $CE = 3$ cm.

Sur le côté [DC] on place le point F tel que $AF = 13$ cm.

1) Calculer les longueurs DF, EF et AE.
2) Le triangle AEF est-il rectangle?



CORRIGE

ABCD est un carré, ses côtés ont pour longueur 12 cm et ses angles sont droits.

1) Le triangle ADF est rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore :

$$AF^2 = AD^2 + DF^2$$
$$13^2 = 12^2 + DF^2$$
$$169 - 144 = DF^2$$
$$DF^2 = 25$$
$$DF = 5\ cm$$

F∈[DC] donc $FC = DC - EF = 12 - 5 = 7\ cm$

Le triangle FCE est rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$$FE^2 = FC^2 + CE^2$$

$$FE^2 = 7^2 + 3^2$$

$$FE^2 = 58$$

$$FE = \sqrt{58} \simeq 7,62\ cm$$

E∈[BC] donc $EB = BC - EC = 12 - 3 = 9\ cm$

Le triangle ABE est rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

$$AE^2 = AB^2 + BE^2$$

$$AE^2 = 12^2 + 9^2$$

$$AE^2 = 225$$

$$AE = \sqrt{225} = 15\,cm$$

2) Dans le triangle AEF, AE est le plus grand côté,

On calcule :

$$AE^2 = 15^2 = 225$$

$$AF^2 + FE^2 = 13^2 + 58 = 169 + 58 = 227$$

Donc $AE^2 \neq AF^2 + FE^2$

La réciproque du théorème de Pythagore ne s'applique pas, le triangle AEF n'est pas rectangle.

Exercice 7 :

Le triangle de côtés 1993, 1032 et 1705 est-il rectangle? justifier

CORRIGE

Le plus grand côté mesure 1 993.

On calcule $1\,993^2 = 3\,972\,049$

puis $1\,032^2 + 1\,705^2 = 1\,065\,024 + 2\,907\,025 = 3\,972\,049$

donc $1\,993^2 = 1\,032^2 + 1\,705^2$

D'après la réciproque de l'énoncé de Pythagore, le triangle est rectangle et son hypoténuse mesure 1 993.

Exercice 8 :

Le triangle de côtés 1,5 ; 1,12 et 1,14 est-il rectangle ?

CORRIGE

Le plus grand côté mesure 1,5.

On calcule :

$$1{,}5^2 = 2{,}25$$

$$1{,}12^2 + 1{,}14^2 = 2{,}554$$

Ainsi : $1{,}5^2 \neq 1{,}12^2 + 1{,}14^2$

La réciproque du théorème de Pythagore ne s'applique pas, le triangle n'est pas rectangle

Exercice 9 : **Réciproque du théorème de Pythagore et aires du triangle rectangle**

1) Construire le triangle ABC tel que CB = 169 mm, AB = 65 mm et AC = 156 mm.
2) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3) Calculer l'aire du triangle ABC.
4) Tracer la hauteur AH du triangle ABC.
   → En utilisant une autre expression qu'en 2) de l'aire de ABC, calculer simplement AH.

CORRIGE

1) Utiliser le compas, garder le mm comme unité. (on ignore que le triangle est rectangle, donc on n'utilise ni équerre, ni demi cercle).

2) Le plus grand côté est BC . On calcule :

$$BC^2 = 169^2 = 28561$$

$$BA^2 + AC^2 = 65^2 + 156^2 = 4225 + 24336 = 28561$$

Ainsi : $BC^2 = BA^2 + AC^2$

D'après la réciproque de l'énoncé de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

3) L'aire d'un triangle est : $Aire = \dfrac{base \times hauteur}{2}$

$$Aire_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2}$$

$$= \frac{65 \times 156}{2}$$

$$= 5070\ mm^2$$

4) On utilise les deux formules de calcul d'aire dans un triangle rectangle, cette fois-ci avec l'hypoténuse :

$$Aire = \frac{base \times hauteur}{2}$$

$$Aire_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2}$$

$$5070 = \frac{169 \times AH}{2}$$

$$5070 \times 2 = 169 \times AH$$

$$AH = \frac{5070 \times 2}{169} = 60\ mm$$