

Chapitre ⑤: Théorème de Pythagore

I. Théorème de Pythagore direct:

1) Activité ①:

ABC un triangle tel que $AB = 3\text{cm}$ et $AC = 4\text{cm}$
et $BC = 5\text{cm}$

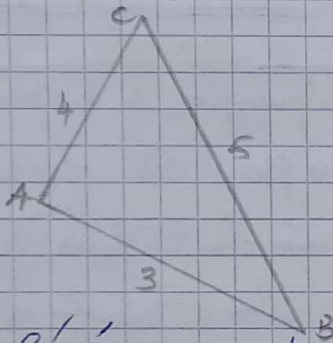
1) a - Construire le triangle ABC

b - Que remarquez-vous sur la nature du triangle ABC

2) Vérifier que $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Réponse:

1) a - figure



b - En utilisant l'équerre, on trouve que le triangle ABC est rectangle en A

2) On a $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

et $BC^2 = 5^2 = 25$

donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$

2) Théorème de Pythagore direct:

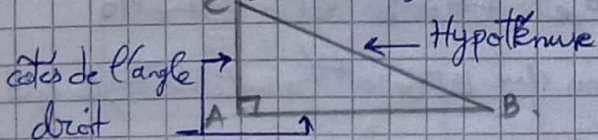
a - Prop ①:

Dans un triangle rectangle, le carré de son hypoténuse est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

Autrement dit: Si ABC est un triangle rectangle en A alors: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

* Figure géométrique:

ABC est un triangle rectangle en A



Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b - Remarque:

* ABC un triangle rectangle en A, donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Alors $\begin{cases} AB^2 = BC^2 - AC^2 \\ AC^2 = BC^2 - AB^2 \end{cases}$

* On utilise le théorème de Pythagore pour calculer les longueurs.

c - Exemple:

EFG un triangle rectangle en E tel que:

$EF = 5$, $EG = 3$ Calculer FG

On a EFG un triangle rectangle en E, donc d'après le théorème de Pythagore

direct on a: $FG^2 = EF^2 + EG^2$

$$FG^2 = 5^2 + 3^2$$

$$FG^2 = 25 + 9$$

$$FG^2 = 34$$

D'où $FG = \sqrt{34}$

3) Exercice d'application:

ABC un triangle isocèle et rectangle en A tel que $AB = 4\text{cm}$

Soit M le milieu de [BC]

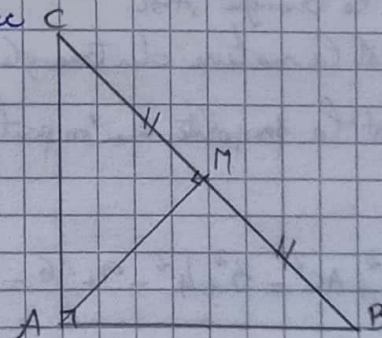
1) Construire la figure

2) Calculer BC

3) Déduire AM

Solution:

1) figure



2) Ona ABC un triangle rectangle en A
Donc d'après le théorème de Pythagore direct, on a:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 4^2 + 4^2$$

$$BC^2 = 16 + 16$$

$$BC^2 = 32$$

$$\text{donc } BC = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2}$$

$$\text{càd } BC = 4\sqrt{2}$$

3) Ona ABC un triangle isocèle en A
et M est milieu de (BC)

Donc (AM) est la médiane de (BC)

càd (AM) $\perp$ (BC)

Donc le triangle AMB est rectangle en M

M milieu de (BC) donc $BM = \frac{BC}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

* Le triangle AMB est rectangle en M

donc d'après le théorème de Pythagore direct, on a:

$$AB^2 = AM^2 + BM^2$$

$$4^2 = AM^2 + (2\sqrt{2})^2$$

$$16 = AM^2 + 8$$

$$AM^2 = 16 - 8$$

$$AM^2 = 8$$

$$\text{Alors: } AM = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

II - Théorème réciproque de Pythagore

1) activité 2:

ABC un triangle tel que $AB = 4\text{cm}$ et $AC = 3\text{cm}$

et $BC = 5\text{cm}$

1) Comparer BC^2 et $AB^2 + AC^2$

2) Construire le triangle ABC

3) Quelle est la nature du triangle ABC?

4) Quelle est la propriété qu'on peut extraire?

Solutions:

$$1) \text{ Ona } AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\text{et } BC^2 = 25$$

$$\text{donc } AB^2 + AC^2 = BC^2$$

2)



3) En utilisant l'équerre, on trouve que le triangle ABC est rectangle en A

4) Ona trouvé que si ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est triangle rectangle en A.

2) Théorème réciproque de Pythagore:

a - propo 2:

Dans un triangle, si le carré de la longueur du plus grand côté est égale à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Autrement dit: Si dans un triangle ABC, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ce triangle est rectangle en A.

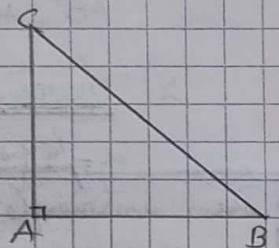
* Figure géométrique:

ABC un triangle tel que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Alors ABC est triangle rectangle

en A



* Remarque: On utilise le théorème de Pythagore réciproque pour montrer qu'un triangle est rectangle (pour montrer la perpendicularité)

b - Exemple:

EFG un triangle tel que:

$$EG = 6 \text{ et } FG = 8 \text{ et } EF = 10$$

Montrons que EFG est triangle rectangle en G

$$\text{On a } \begin{cases} EG^2 = 8^2 = 64 \\ EF^2 = 10^2 = 100 \end{cases}$$

$$\text{donc } EG^2 + FG^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\text{Alors } EG^2 + FG^2 = EF^2$$

Donc d'après le théorème de Pythagore réciproque, le triangle EFG est rectangle en G.

3) Exercice d'application:

Soit ABC un triangle tel que:

$$AB = 2\sqrt{2} \text{ cm}, AC = \sqrt{3} \text{ cm et } BC = \sqrt{5} \text{ cm}$$

Montrez que ABC est triangle rectangle.

Solution:

$$\text{On a } \begin{cases} AB^2 = (2\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8 \\ AC^2 = (\sqrt{3})^2 = 3 \\ BC^2 = (\sqrt{5})^2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{On a } AC^2 + BC^2 = 3 + 5 = 8$$

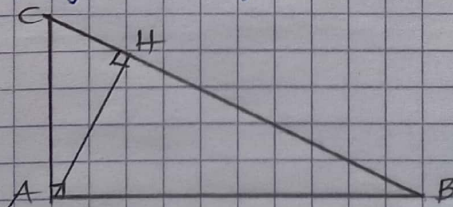
$$\text{donc } AC^2 + BC^2 = AB^2$$

Donc d'après le théorème réciproque de Pythagore ABC est triangle rectangle en C.

⇒ Paragraphe supplémentaire:

Les relations métriques

ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A sur (BC).



$$\textcircled{1} \cdot AB \times AC = AH \times BC$$

$$\textcircled{2} \cdot AB^2 = BH \times BC$$

$$\textcircled{3} \cdot AC^2 = CH \times BC$$

$$\textcircled{4} \cdot AH^2 = BH \times CH$$

La démonstration à la fin des exercices