Chapitre 4

Thalès

I – Homothéties

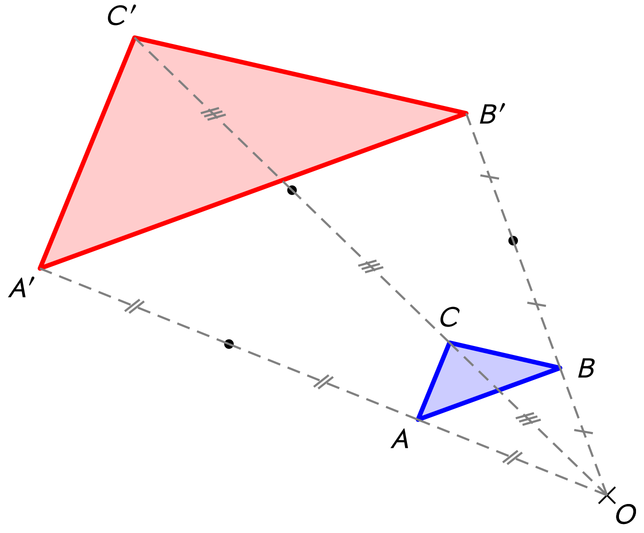
1. Définitions

Définition

Soit O un point nommé centre et k un nombre nommé rapport. Si A est un point,alors l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport k est :

le point $A' \in [OA)$ tel que $OA' = k\ OA$ si $k > 0$,
le point $A' \in [\underline{AO})$ tel que $OA' = -k\ OA$ si $k < 0$.

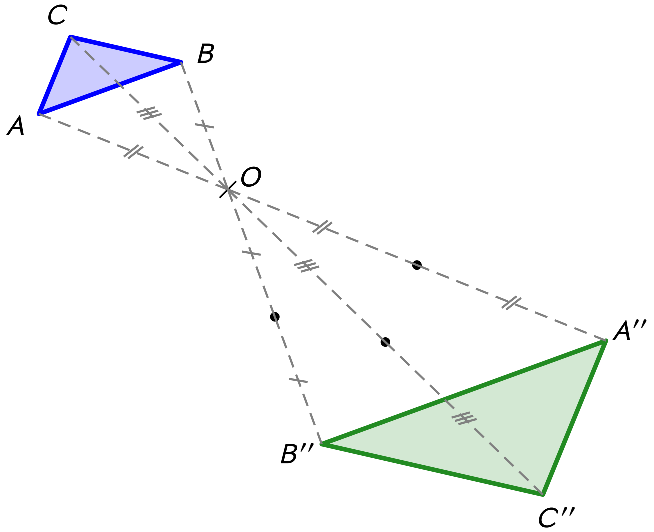
Exemple 1 (rapport positif) : *On a d'abord tracé le triangle ABC bleu et choisi un point O, puis on a tracé son image par 'homothétie de centre O et de rapport 3. On a ainsi obtenu le triangle $A'B'C'$ rouge :*



— *Comme l'homothétie est de rapport > 0, la figure obtenue est « dans le même sens » que celle d'origine.*

— *Les distances OA, OB et OC ont été multipliées par 3 pour obtenir les distances OA', OB' et OC'.*

Exemple 2 (rapport négatif) : *Repartons du triangle ABC bleu et du point O, mais traçons cette fois-ci son image par l'homothétie de centre O et de rapport −2. On obtient alors le triangle $A''B''C''$ vert :*



— *Comme l'homothétie est de rapport < 0, la figure obtenue est « dans le sens contraire » que celle d'origine.*

— *Les distances OA, OB et OC ont été multipliées par 2 (en effet, la définition parle de $-k = -(-2) = 2$!) pour obtenir les distances OA'', OB'' et OC''.*

Définitions

— Si la valeur numérique du rapport est inférieure à 1, on obtient une réduction de la figure initiale.

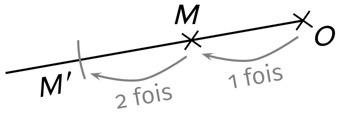
— Si elle est supérieure à 1, alors on obtient un agrandissement de la figure initiale.
De plus, si le rapport vaut exactement −1, cela correspond à une symétrie centrale, vue en 5^{e}.

Oral : 4, 5, 6, 7 p. 160	En classe : 15a p. 161	À la maison : 15b p. 161

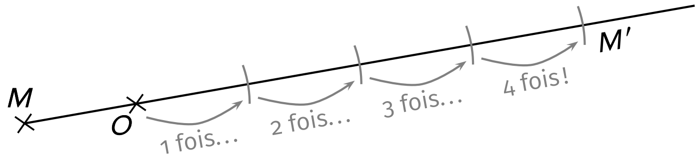
2. Constructions et propriétés

Lorsqu'on sait construire l'image d'un point par une homothétie quelconque, on sait construire l'image de n'importe quelle figure ! On va partir de deux points M et O placés et on va construire l'image de M par l'homothétie de centre O :

Rapport positif (par exemple 2) : Puisque le rapport est positif, on trace $[OM)$ puis on reporte la longueur OM 2 fois (c'est le rapport) **à partir du point** O :



Rapport négatif (par exemple -4) : Puisque le rapport est négatif, on trace $[\underline{MO})$ puis on reporte la longueur OM 4 fois (c'est le "rapport"…) **toujours à partir du point** O :



Pour l'ensemble des autres figures, une propriété est à connaître :

Propriétés

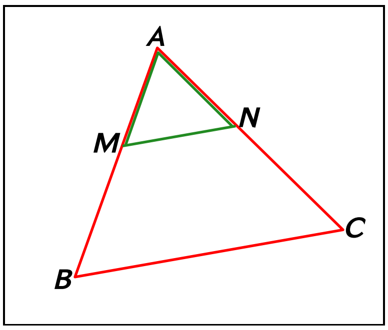
- L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.
- L'image d'un angle par une homothétie est un angle de même mesure.
- Une homothétie de rapport k multiplie toutes les longueurs de la figure initiale par k (ou $-k$ si le rapport est négatif).

  Ainsi, si on trace l'image d'un segment $[AB]$ de 5 cm par une homothétie de rapport 3, on obtiendra un segment de $5 \times 3 = 15$ cm. De même si l'on trace l'image d'un cercle de centre M et de rayon 1 cm par une homothétie de rapport -4, on obtiendra un cercle de centre M' et de rayon $1 \times 4 = 4$ cm !
  Par conséquent, toutes les longueurs sont <u>proportionnelles</u> à celles de la figure initiale.

Oral :	En classe :	À la maison :
–	–	17 p. 261

ATTENTION !!!

Il se peut très bien que l'un des points d'une figure soit le centre de l'homothétie : si on doit tracer l'image d'un triangle ABC par l'homothétie de centre A, alors l'image A' du point A sera au même endroit que le point A lui-même… Ce sera en particulier le cas pour nos configurations de Thalès :



Le triangle vert est l'image du triangle rouge par l'homothétie de centre A et de rapport (environ) 0,42.

Définition

Deux triangles qui ont des côtés proportionnels (c'est toujours le cas dans une configuration de Thalès) sont appelés des triangles semblables.

Une autre propriété est du coup assez naturelle et essentielle à connaître :

Propriété

Si l'on multiplie/divise toutes les longueurs d'une figure ou d'un solide par un nombre k :

- les aires sont multipliées/divisées par k^2,
- les volumes sont multipliés/divisés par k^3,
- les mesures d'angles ne changent pas.

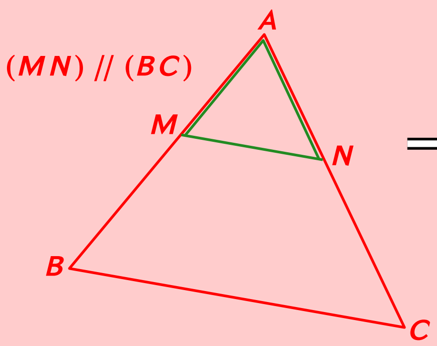
Ainsi, si un grand triangle $A'B'C'$ est obtenu en multipliant les longueurs d'un petit triangle ABC par k, alors $\mathscr{P}_{\text{A'B'C'}} = k\ \mathscr{P}_{\text{ABC}}$, $\mathscr{A}_{\text{A'B'C'}} = k^2\ \mathscr{A}_{\text{ABC}}$, mais aussi $\widehat{A'} = \widehat{A}$, $\widehat{B'} = \widehat{B}$ et $\widehat{C'} = \widehat{C}$!

Oral : p. 192	En classe : 2 p. 191 + 15, 19 p. 193 + 26 p. 194	À la maison : 3 p. 191 + 16, 17, 18 p. 193 + 27, 28, 30, 32 p. 194

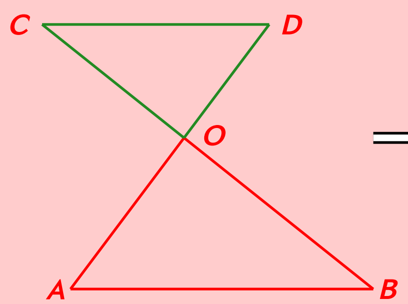
II – Calculer une longueur

Théorème de Thalès

Si (BM) et (CM) sont deux droites sécantes en A et si $(BC) \mathbin{/\!/} (MN)$ alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$:

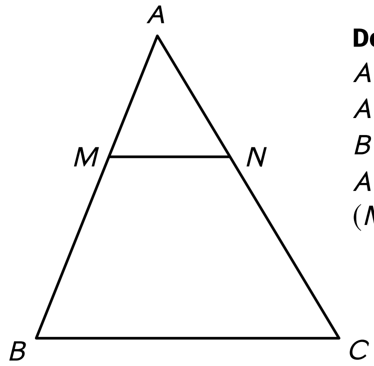


$\Longrightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$



$\Longrightarrow \dfrac{OC}{OB} = \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{DC}{AB}$

Exemple :



Données :
$AB = 12$ cm
$AC = 10$ cm
$BC = 9$ cm
$AN = 4$ cm
$(MN) \,//\, (BC)$

Calculer AM.

Réponse :

D : *$ABCMN$ est une configuration de Thalès avec $(MN) \,//\, (BC)$*

P : *Donc d'après le théorème de Thalès on a :*

C : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

On écrit le DPC du théorème de Thalès

$\dfrac{AM}{12} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{MN}{9}$ ← *On remplace avec les valeurs connues*

$\dfrac{AM}{12} = \dfrac{4}{10}$ ← *On garde le quotient complet et celui ou se trouve la longueur à calculer*

$AM = \dfrac{12 \times 4}{10}$ ← *On calcule grâce à un produit en croix*

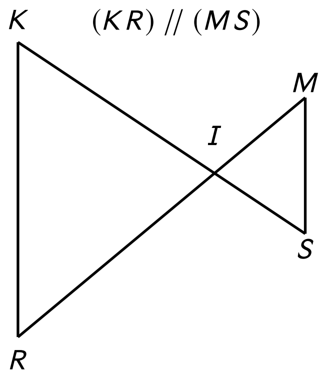
$AM = \dfrac{24}{5}$ ← *On écrit ce que la calculatrice affiche (valeur exacte)*

On appuie sur  *pour avoir une valeur décimale*

$AM = 4,8$ cm

■ **EXERCICE :**

Données
$KI = 5,5$ cm
$RI = 6$ cm
$KR = 6,5$ cm
$MS = 4$ cm
$(KR) \,//\, (MS)$



Calculer IM (arrondir au dixième).

<u>Solution</u> : D : $KRIMS$ est une configuration de Thalès telle que $(KR) \,//\, (MS)$

P : Donc d'après le théorème de Thalès on a :

C : $\dfrac{IK}{IS} = \dfrac{IR}{IM} = \dfrac{KR}{MS}$

$\dfrac{5,5}{IS} = \dfrac{6}{IM} = \dfrac{6,5}{4}$

$\dfrac{6}{IM} = \dfrac{6,5}{4}$

$IM = \dfrac{6 \times 4}{6,5}$

$IM = \dfrac{42}{13}$

$IM \approx 3,7$ cm

Oral : 8, 12, 13, 14 p. 160	En classe : 2a p. 159 + 18b, 20 p. 161 + 29 p. 162	À la maison : 3a p. 159 + 19b, 21, 22 p. 161 + 31 p. 162 + 33 p. 163

III – Montrer que deux droites sont parallèles

Réciproque du théorème de Thalès

Si une configuration vérifie les points suivants :

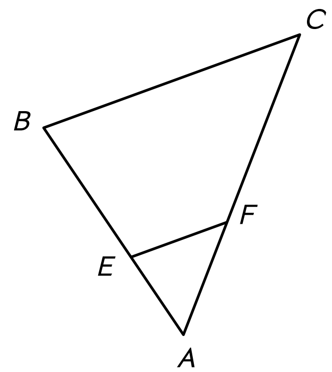
- Les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre,
- $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$,

alors dans cette configuration les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exemple :
Sur la figure ci-contre on a :

- $AE = 1,2$ cm
- $AB = 4,8$ cm
- $AC = 7,2$ cm
- $AF = 1,8$ cm

Montrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.



Réponse :

L'égalité à tester est $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \cancel{\frac{EF}{BC}}$: On écrit l'égalité de Thalès

On calcule les rapports de l'égalité de Thalès (hors parallèles)

$$* \ \frac{AE}{AB} = \frac{1,2}{4,8} = \frac{1}{4}$$

$$* \ \frac{AF}{AC} = \frac{1,8}{7,2} = \frac{1}{4}$$

On remplace avec les valeurs et on simplifie avec la calculatrice

m

Donc l'égalité est vraie. Les quotients sont égaux, donc l'égalité est vraie

D : • Les points A, E, B et A, F, C sont alignés dans le même ordre.
• $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

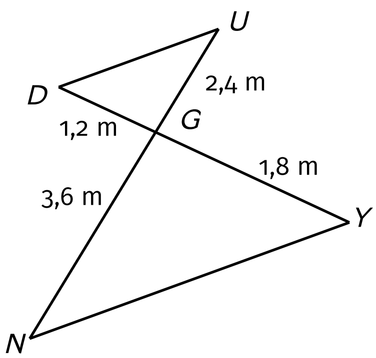
Le D contient 2 points : "l'alignement dans le même ordre" et l'égalité

P : Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès,

C : Les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

■ **Exercice :**

Voici une figure. Démontrer que les droites (DU) et (NY) sont parallèles.



Solution : On calcule séparément chaque quotient : $\frac{DG}{GY} = \frac{1,2}{1,8} = \frac{2}{3}$ et $\frac{GU}{GN} = \frac{2,4}{3,6} = \frac{2}{3}$. Donc l'égalité est vraie.

D : • Les points U, G, N et D, G, Y sont alignés dans le même ordre.
• $\frac{GD}{GY} = \frac{GU}{GN}$

P : Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès,

C : Les droites (DU) et (NY) sont parallèles.

Oral : –	En classe : 40 p. 163 + 42b p. 164	À la maison : 41a, 43 p. 164

IV – Montrer que deux droites ne sont pas parallèles

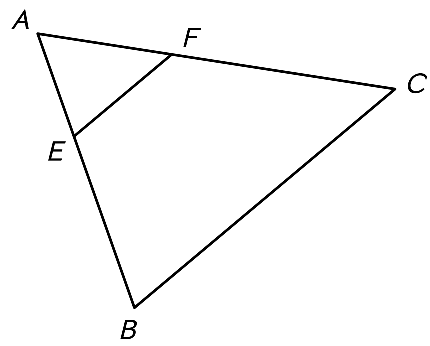
Contraposée du théorème de Thalès

Si une configuration vérifie les points suivants :

- Les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre,
- $\frac{AM}{AB} \boxed{\neq} \frac{AN}{AC}$,

alors dans cette configuration les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Exemple :



Sur la figure ci-contre on a :

- $AB = 1,4$ cm
- $AE = 0,4$ cm
- $AC = 2,5$ cm
- $AF = 0,5$ cm

Les droites (EF) et (BC) sont-elles parallèles ?

Réponse : *On calcule séparément chaque quotient :*

$$\frac{AE}{AB} = \frac{0,4}{1,4} = \frac{2}{7}$$
$$\frac{AF}{AC} = \frac{0,5}{2,5} = \frac{1}{5}$$

Donc l'égalité est fausse. ⟵ *On écrit que l'égalité n'est pas vérifiée*

D : • Les points A, E, B et A, F, C sont alignés dans cet ordre.

• $\frac{AE}{AB} \neq \frac{AF}{AC}$ ⟵ *Dans le D la seule différence avec le paragraphe II est l'égalité non vérifiée*

P : Donc d'après la contraposée du théorème de Thalès on a : ⟵ *C'est la contraposée qu'on utilise ici*

C : Les droites (EF) et (BC) ne sont pas parallèles.

Oral :	En classe :	À la maison :
–	42a p. 164	41b, 44 p. 164

Tâche complexe : 61 p. 167 + 85, 86 p. 171