

Chapitre 5 : Les puissances

Puissance d'un nombre réel

Définition

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \dots \times a}_{n \text{ fois}} \quad \begin{matrix} \text{puissance} \\ n \text{ de } a \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \boxed{a^n} \\ \text{base} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{exposant} \\ n \end{matrix}$$

et on a: $a^0 = 1$ et $a^1 = a$

signe d'une puissance

$$\begin{cases} \text{Si } a > 0 \rightarrow a^n \text{ positive} \\ \text{Si } a < 0 \rightarrow \begin{cases} n \text{ pair} \rightarrow a^n \text{ positive} \\ n \text{ impair} \rightarrow a^n \text{ négative} \end{cases} \end{cases}$$

Exemple

- $\sqrt{7}^3$ positive
- $(-5)^{124}$ positive
- $(-\sqrt{3})^{11}$ négative

Remarque importante

- * n pair donc: $(-a)^n = a^n$
- * n impair: $(-a)^n = -a^n$

Exemples

- $(-4)^2 = 4^2 = 16$
- $(-4)^3 = -4^3 = -64$

Cas particuliers

$$0^n = 0, \quad 1^n = 1, \quad (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pair} \\ -1 & n \text{ impair} \end{cases}$$

puissance à exposant relatif

Définition

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

- $\sqrt{2}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\left(\frac{-3}{\sqrt{5}}\right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{5}}{-3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

Les opérations sur les puissances

même base	$a^n \times a^m = a^{n+m}$	On garde la base, et on somme les exposants
	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	On garde la base, et on soustrait les exposants
	$(a^n)^m = a^{n \times m}$	On garde la base, et on multiplie les exposants
même exposant	$a^n \times b^n = (a \times b)^n$	On garde l'exposant, et on multiplie les bases
	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	On garde l'exposant, et on divise les bases

Exemples:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{5}^3 \times \sqrt{5}^{-7} = \sqrt{5}^{3+(-7)} = \sqrt{5}^{-4} = \frac{1}{\sqrt{5}^4} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \\ b &= \frac{\sqrt{7}^3}{\sqrt{7}^{1-2}} = \sqrt{7}^{3-(-2)} = \sqrt{7}^5 = \sqrt{7}^4 \times \sqrt{7} = (\sqrt{7}^2)^2 \sqrt{7} = 7^2 \sqrt{7} = 49\sqrt{7} \\ c &= (\sqrt{7}^2)^3 = \sqrt{7}^{2 \times 3} = \sqrt{7}^6 \\ d &= \sqrt{3}^{-2} \times \sqrt{2}^{-2} = (\sqrt{3} \times \sqrt{2})^{-2} = \sqrt{6}^{-2} = \frac{1}{\sqrt{6}^2} = \frac{1}{6} \\ e &= \frac{\sqrt{45}^3}{\sqrt{5}^3} = \left(\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}\right)^3 = \sqrt{\frac{45}{5}}^3 = \sqrt{9}^3 = 3^3 = 27 \end{aligned}$$

Écriture scientifique

Définition

Soient a un nombre décimal et n entier relatif
L'écriture $x = a \times 10^n$ ou $x = -a \times 10^n$ avec
 $1 \leq a < 10$ s'appelle écriture scientifique de x

Puissance de 10

$$\begin{aligned} 10^n &= \underbrace{100 \dots 00}_{n \text{ zéros}} \\ 10^{-n} &= \underbrace{0,00 \dots 01}_{n \text{ zéros}} \end{aligned}$$

Exemples

$$\begin{aligned} a &= 3452 = 3,452 \times 10^3 \\ b &= 0,000023 = 2,3 \times 10^{-5} \\ c &= 678,25 \times 10^5 = 6,7825 \times 10^2 \times 10^5 \\ &= 6,7825 \times 10^7 \end{aligned}$$