

Chapitre 3 : Les puissances

I. Puissance d'un nombre réel :

1°) Définition :

a un nombre réel et n un entier naturel non nul

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} \quad a^0 = 1$$

puissance n de a $\rightarrow a^n$ $\leftarrow$ exposant $a^1 = a$
base

* Remarques et cas particuliers

$\rightarrow a^n$ se lit : a puissance n ou a exposant n

$\rightarrow a^0 = 1$ ($a \neq 0$) et $a^1 = a$

$\rightarrow 0^n = 0$ (avec $n \neq 0$) et $1^n = 1$

$\rightarrow (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

* Exemples :

$$* 2005^0 = 1 \quad * 2007^2 = 2007$$

$$* 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

$$* \sqrt{2}^3 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$* 0^{2020} = 0$$

$$* (-7)^3 = (-7) \times (-7) \times (-7) = -343$$

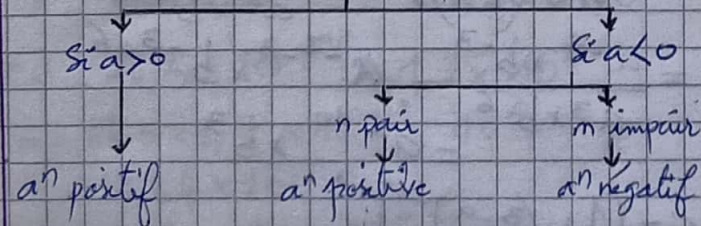
$$* (-\sqrt{2})^4 = (-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2}) = 4$$

2) Le signe d'une puissance :

a. Propriété :

a un nombre réel, n entier naturel non nul.

Le signe de la puissance a^n



b. Exemples :

$$* \sqrt{7}^3 > 0 \text{ car la base } \sqrt{7} \text{ positif}$$

$$* (-\sqrt{11})^{124} > 0 \text{ car l'exposant } 124 \text{ positif}$$

$$* \left(-\frac{\sqrt{3}}{7}\right)^{11} < 0 \text{ car la base } -\frac{\sqrt{3}}{7} \text{ négatif et l'exposant } 11 \text{ impair}$$

$$* -\sqrt{5}^{12} < 0 \text{ car la base est } \sqrt{5} \text{ pas } -\sqrt{5}$$

c. Remarque importante :

a un nombre réel non nul, n entier naturel

* Si n est paire alors : $(-a)^n = a^n$

* Si n est impaire alors : $(-a)^n = -a^n$

* Exercice d'application :

Calculer :

$$a = (-4)^3 \quad b = -2^4 \quad c = -\left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

$$d = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \quad e = -(-\sqrt{5})^2 \quad f = \left(-\sqrt{16}\right)^2$$

Solution :

$$a = (-4)^3 = -4^3 = -64$$

$$b = -2^4 = -16$$

$$c = -\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\left(-\frac{8}{27}\right) = \frac{8}{27}$$

$$d = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{16}{25} - \frac{1}{8} = \frac{128 - 25}{200} = \frac{103}{200}$$

$$e = -(-\sqrt{5})^2 = -(\sqrt{5})^2 = -5$$

$$f = \left(-\sqrt{16}\right)^2 = \sqrt{16}^2 = 16 = 4$$

3) Puissance à exposant négatif :

a. Définition :

Soient a et b deux nombres réels non nuls et n un nombre entier naturel.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

b. Exemples :

$$* \sqrt{2}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}^1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$* \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^{-2} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$* (3 + \sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{3 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{2}}}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{2}}}{9 - 2} = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{2}}}{7}$$

II. Les opérations sur les puissances:

1) Activité:

1) Ecrire les nombres suivants sous forme d'une puissance du nombre 2

$$A = 2^5 \times 2^3$$

$$B = 16^5$$

$$C = 8^3 \times 4^{32}$$

2) Ecrire le nombre suivant sous forme $2^n \times 3^p$ avec n, p deux nombres entiers relatifs

$$D = \frac{8^2 \times 9^3}{3^5 \times 2^4}$$

Solution:

$$1^o) A = 2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$$

$$B = 16^5 = (2^4)^5 = 2^{4 \times 5} = 2^{20}$$

$$C = 8^3 \times 4^{32} = (2^3)^3 \times (2^2)^{32} = 2^{3 \times 3} \times 2^{2 \times 32} = 2^9 \times 2^{64}$$

$$= 2^{9+64} = 2^{73}$$

$$2^o) D = \frac{8^2 \times 9^3}{3^5 \times 2^4} = \frac{(2^3)^2 \times (3^2)^3}{3^5 \times 2^4} = \frac{2^6 \times 3^6}{3^5 \times 2^4}$$

$$= 2^{6-4} \times 3^{6-5} = 2^2 \times 3^1$$

2) Propriétés:

a, b deux nombres réels non nuls, n et m deux nombres entiers relatifs

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

Remarque:

→ Si on a même base, on garde la base
→ Si on a même exposant, on garde l'exposant.

3) Exemples:

$$a = \sqrt{5}^3 \times \sqrt{5}^{-7} = \sqrt{5}^{3+(-7)} = \sqrt{5}^{-4} = \frac{1}{\sqrt{5}^4} = \frac{1}{5^2}$$

$$b = \sqrt{2}^3 \times \sqrt{2}^{-2} \times \sqrt{2}^{-1} = \sqrt{2}^{3-2-1} = \sqrt{2}^0 = 1$$

$$c = \frac{5^8}{5^{11}} = 5^{8-11} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

$$d = \sqrt[3]{7}^5 = \sqrt[3]{7^{15}} = \sqrt[3]{7^{3 \times 5}} = \sqrt[3]{7^3}^5 = \sqrt{7}^5$$

$$= \sqrt{7}^4 \times \sqrt{7} = (\sqrt{7}^2)^2 \times \sqrt{7} = 49\sqrt{7}$$

$$e = (\sqrt{7}^2)^{-3} = \sqrt{7}^{2 \times (-3)} = \sqrt{7}^{-6} = \frac{1}{\sqrt{7}^6}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{7}^2)^3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$$

$$f = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$g = \sqrt{5}^3 \times \sqrt{7}^3 = (\sqrt{5} \times \sqrt{7})^{3 \times 2} = \sqrt{35}^6 = \sqrt{35}^3$$

$$= \sqrt{35}^2 \times \sqrt{35} = 35\sqrt{35}$$

$$h = 3^{-2} \times \sqrt{3}^{-2} \times \sqrt{2}^{-2} = (3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2})^{-2}$$

$$= (3\sqrt{6})^{-2} = \frac{1}{(3\sqrt{6})^2} = \frac{1}{9 \times 6} = \frac{1}{54}$$

$$i = \frac{\sqrt{45}^3}{\sqrt{5}^3} = \left(\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}\right)^3 = \sqrt{\frac{45}{5}}^3 = \sqrt{9}^3 = 3^3 = 27$$

$$j = \frac{25^{-2}}{15^{-2}} = \left(\frac{25}{15}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

4) Exercice d'application

a et b deux nombres réels non nuls et $a \neq 3$
Simplifier ce qui suit.

$$A = \frac{a^2 \times (a^5)^3}{(a \times a^2)^4} \quad B = \frac{a^{-5} \times b^{-3} \times a^{-2}}{a^3 \times (b^{-2})^3}$$

$$C = \left[1 + \left(\frac{3-a}{1+a}\right)^{-1}\right]^{-1}$$

Solution:
 $A = \frac{a^2 \times (a^5)^3}{(a \times a^2)^4} = \frac{a^2 \times a^{5 \times 3}}{(a^3)^4} = \frac{a^2 \times a^{15}}{(a^3)^4}$

$$= \frac{a^{2+15}}{a^{3 \times 4}} = \frac{a^{17}}{a^{12}} = a^{17-12} = a^5$$

$$B = \frac{a^{-5} \times b^{-3} \times a^{-2}}{a^3 \times (b^{-2})^3} = \frac{a^{-5+(-2)} \times b^{-3}}{a^3 \times b^{-2 \times 3}} = \frac{a^{-7} \times b^{-3}}{a^3 \times b^{-6}}$$

$$= \frac{a^{-7} \times b^{-3}}{a^3 \times b^{-6}} = a^{-7-3} \times b^{-3+6} = a^{-10} \times b^3$$

$$C = \left[1 + \left(\frac{3-a}{1+a}\right)^{-1}\right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{1+a}{3-a}\right]^{-1} = \left(\frac{3-a+1+a}{3-a}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{3-a}\right)^{-1} = \frac{3-a}{4}$$

III - L'écriture scientifique

1°) Puissances de 10

a - Propriétés

n un entier naturel

$$10^n = \underbrace{100 \dots 00}_{n \text{ zéros}}$$

$$10^{-n} = \underbrace{0,00 \dots 00,1}_{n \text{ zéros}}$$

b - Exemples

$$\begin{aligned} * 10^4 &= 10\,000 & * 10^7 &= 10\,000\,000 \\ * 10^{-1} &= 0,1 & * 10^{-2} &= 0,01 \\ * 10^{-3} &= 0,001 & * 10^{-5} &= 0,00001 \end{aligned}$$

2°) Écriture scientifique

a - Définition:

Soient a un nombre décimal et n un entier relatif.

L'écriture $x = a \times 10^n$ ou $x = -a \times 10^n$

s'appelle écriture scientifique de x avec $1 \leq a < 10$

b - Exemples

$$a = 3452 = 3,452 \times 10^3$$

$$b = 0,00000234 = 2,34 \times 10^{-6}$$

$$\begin{aligned} c &= 678,25 \times 10^5 \\ &= 6,7825 \times 10^2 \times 10^5 \\ &= 6,7825 \times 10^{2+5} = 6,7825 \times 10^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= -0,000981 \times 10^9 \\ &= -9,81 \times 10^{-4} \times 10^9 \\ &= -9,81 \times 10^{-4+9} = -9,81 \times 10^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= -24,5 \times 10^{-11} \times 1,2 \times 10^3 \\ &= -24,5 \times 1,2 \times 10^{-11+3} \\ &= -29,4 \times 10^{-8} \\ &= -2,94 \times 10 \times 10^{-8} \\ &= -2,94 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \frac{25,5 \times 10^3}{0,05 \times 10^3} = \frac{25,5}{0,05} \times 10^{-10-3} \\ &= 510 \times 10^{-13} \\ &= 5,1 \times 10^2 \times 10^{-13} \\ &= 5,1 \times 10^{-11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= -113 \times 10^5 + 7,2 \times 10^7 \\ &= -113 \times 10^5 + 7,2 \times 10^2 \times 10^5 \\ &= -113 \times 10^5 + 720 \times 10^5 \\ &= (-113 + 720) \times 10^5 \\ &= 607 \times 10^5 \\ &= 6,07 \times 10^2 \times 10^5 \\ &= 6,07 \times 10^7 \end{aligned}$$

Méthode: Pour trouver l'écriture scientifique d'un nombre réel, on glisse la virgule jusqu'à trouver un nombre entre 1 et 10,
 → glissement à droite = exposant négatif
 → glissement à gauche = exposant positif