

IDENTITÉS REMARQUABLES ET PUISSANCES

2

Objectifs d'apprentissage

- ✍ Développer et factoriser une expression littérale.
- ✍ Connaître et utiliser les identités remarquables en deux directions.
- ✍ Connaître et utiliser les règles de calcul sur les puissances.
- ✍ Connaître et utiliser la puissance positive et négative d'un nombre relatif et rationnel.
- ✍ Connaître et utiliser l'écriture scientifique.

Gestion du temps

🕒 12 heures

Prérequis

- ⊗ Calcul littéral.
- ⊗ Développement et factorisation.
- ⊗ Identités remarquables.
- ⊗ Puissances d'un nombre rationnel.
- ⊗ Les racines carrées.

Outils didactiques

- ♣ Tableau.
- ♣ Livre scolaire.

◆ Pr : Abdelilah BOUTAYEB

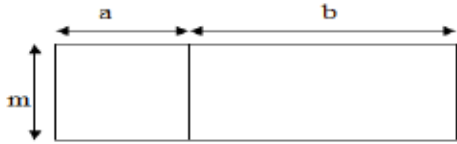
◆ Niveau : 3^{ème} APIC

◆ Matière : Mathématiques

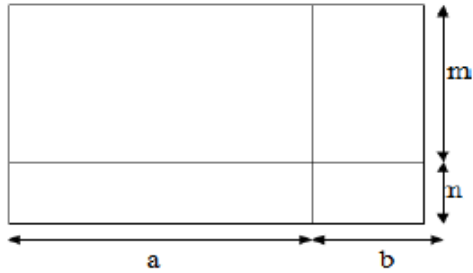
◆ Etablissement : Collège Nahda

Activités

Activité 1 : D'après la figure ci-dessous montre que :
 $m(a + b) = ma + mb$



Activité 2 : D'après la figure ci-dessous montre que :
 $(m + n)(a + b) = ma + mb + na + nb$



Activité 3 : Factoriser :

$$15a - 15b ; 3abc + 5ab ; 7x - x^2$$

I- Développement :

* **Définition :** Développer, c'est transformer un produit en une somme ou en une différence.

* **Propriétés :** a, b, c, d et k désignent des nombres réels :

$$k(a + b) = k \times a + k \times b \quad k(a - b) = k \times a - k \times b$$

$$(a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

* **Exemples :** * $2x(3 + \sqrt{2}) = 2x \times 3 + 2x \times \sqrt{2} = 6x + 2\sqrt{2}x$

$$** -5(2x - 3) = -5 \times 2x + 5 \times 3 = -10x + 15$$

$$*** (3\sqrt{2} - 1)(2 + \sqrt{2}) = 3\sqrt{2} \times 2 + 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 1 \times 2 - 1 \times \sqrt{2} \\ = 6\sqrt{2} + 3 \times 2 - 2 - \sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 6 - 2 - \sqrt{2} = 6\sqrt{2} - \sqrt{2} + 4 = 5\sqrt{2} + 4$$

II- Factorisation :

* **Définition :** Factoriser, c'est transformer une somme ou une différence en un produit.

* **Propriétés :** a, b et k désignent des nombres réels :

$$k \times a + k \times b = k(a + b) \quad k \times a - k \times b = k(a - b)$$

* **Exemples :** * $\frac{4}{7}x - \frac{8}{7} = \frac{4}{7} \times x - \frac{4}{7} \times 2 = \frac{4}{7}(x - 2)$

$$** 3abc + 9a^2bc + 15ab^2c = 3abc \times 1 + 3abc \times 3a + 3abc \times 5b = 3abc(1 + 3a + 5b)$$

$$*** 2\sqrt{3}a - \sqrt{6}a^2 = 2 \times \sqrt{3}a - \sqrt{2}a \times \sqrt{3}a = \sqrt{3}a(2 - \sqrt{2}a)$$

III- Les identités remarquables :

* **Propriétés :** a et b désignent des nombres réels : Développement

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Factorisation

Evaluation

Exercice 1 : Développe puis réduis :

$$-2a(3a - 4) ; (3\sqrt{2} + 4)(-2\sqrt{5} - 1) ; \\ -\sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{3}\right) ; 7x(2x - 5) - x(2x - 5) ; (3x - 1)(2 - x) - (5x + 2)(3 - x) ; \\ 2\sqrt{3}(4 - \sqrt{3})(\sqrt{2} + 4\sqrt{3})$$

Exercice 2 : Factorise puis réduis :

$$15a^2bc^3 - 5abc + 25ab^2c ; 21a^2 - 35a ; \\ -2\sqrt{14} - 2\sqrt{7} ; \sqrt{15} - 2\sqrt{35} ; \\ (2x + 3)^2 + (7 - 5x)(2x + 3) ; \\ (-5x - 8)(4x^2 + 3) + 3 + 4x^2 ; \\ (x + 1)(2x - 5) - (x + 1)(6x - 9) + x + 1 ; \\ (3x - 5)(x + 7) + (6x - 10)(-4 + 3x)$$

Exercice 3 : Développe puis réduis :

$$(\sqrt{7} - 7)^2 ; (2\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 ; (2\sqrt{8}x - 3\sqrt{6})^2 \\ (3\sqrt{10} + 4\sqrt{11}x)(3\sqrt{10} - 4\sqrt{11}x) ; \\ (-\sqrt{5}x - 1)^2$$

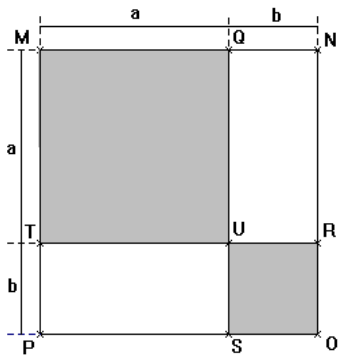
Exercice 4 : Développe puis réduis :

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3}) + (4x - 3)^2 ; \\ (3x - 1)^2 - (4x + 3)(x - 1) ;$$

Activités

Activité 4 : Calculer l'aire du carré MNOP de deux façons différentes et déduire que :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



2) Déduire que :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(on remarque que $a - b = a + (-b)$)

Activité 5 : Calculer les puissances suivantes :

$$\left(\frac{5}{7}\right)^0 ; \left(\frac{1}{4}\right)^1 ; \left(\frac{2}{3}\right)^3 ; (-2)^3 ; (-2)^4$$

$$-1^4 ; -1^5 ; 0^7 ; 10^5 ; 10^{-4} ; 5^{-2}$$

$$\left(\frac{3}{8}\right)^{-1} ; \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$$

Contenu de la leçon

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

*** Exemples :** 1) Développement

$$* (x + \sqrt{3})^2 = x^2 + 2 \times x \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$$

$$** (2\sqrt{5} - \sqrt{3}x)^2 = (2\sqrt{5})^2 - 2 \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{3}x + (\sqrt{3}x)^2 = 20 - 4\sqrt{15}x + 3x^2$$

$$*** (2\sqrt{7}x + 3\sqrt{5})(2\sqrt{7}x - 3\sqrt{5}) = (2\sqrt{7}x)^2 - (3\sqrt{5})^2 = 28x^2 - 45$$

2) Factorisation

$$* 25x^2 + 30x + 9 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 3 + 3^2 = (5x + 3)^2$$

$$** 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = (\sqrt{2}x)^2 - 2 \times \sqrt{2}x \times 1 + 1^2 = (\sqrt{2}x - 1)^2$$

$$*** 81x^2 - 7 = (9x)^2 - (\sqrt{7})^2 = (9x - \sqrt{7})(9x + \sqrt{7})$$

IV- Les puissances :

1) Puissances d'un nombre relatif :

*** Définition :** a désigne un nombre relatif et n désigne un nombre entier positif.

La notation a^n désigne une puissance de a et se lit « a exposant n ».

Exposant entier positif

$$\bullet a^0 = 1 ; \quad a^1 = a$$

$$\bullet \text{Pour } n \geq 2 : a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Exposant entier négatif

$$\bullet \text{Lorsque } a \neq 0, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\bullet \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

*** Exemples :** $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$$** 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} ; \quad *** \left(\frac{3}{7}\right)^{-5} = \left(\frac{7}{3}\right)^5$$

*** Propriétés :** Pour tous nombres relatifs a et b non nuls, et pour tous nombres entiers relatifs m et n :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} ; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} ; \quad (a^m)^n = a^{m \times n} \rightarrow \text{Puissances d'un même nombre}$$

Evaluation

$$3x - (5x - \sqrt{2})(5x + \sqrt{2}) ;$$

$$4x(\sqrt{2}x + 5)(\sqrt{2}x - 5)$$

Exercice 5 : Factorise : (Ex:35 - p:19)

$$x^2 + 6x + 9 ; \quad 4x^2 - 4x + 1 ;$$

$$16y^2 + 96y + 144 ; \quad a^2 + 16 - 8a ;$$

$$9 - 36b + 36b^2$$

Exercice 6 : Factorise :

$$16x^2 - 11 ; \quad 121 - 8x^2 ; \quad 10x^4 - 5 ;$$

$$3x^{10} - 144 ; \quad 17 - 4x^8 ;$$

$$(2x - 5)^2 - (x + 1)^2$$

Exercice 7 : Factorise puis réduis :

$$x^2 - 9 + (x + 3)(5x - 8) ;$$

$$4x + 10 + 16x^2 - 100 ;$$

$$9x^2 + 12x + 4 + (x + 7)(3x + 2) ;$$

$$(2x - 5)(x - 9) + 4x^2 - 25 - (2x - 5)^2$$

Exercice 8 : Calcule :

$$4^3 ; (-2)^4 ; -5^2 ; -(-\sqrt{7})^2 ; \left(-\sqrt{16}\right)^2$$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^{-2} ; \quad (3 + \sqrt{2})^{-1}$$

Exercice 9 : (Ex:15 - p:17)

$$11^5 \times 11^9 ; \quad 10^{-8} \times 10^3 ; \quad (7^5)^2 ; \quad 8^5 \times 3^5$$

$$\frac{9^{11}}{9^7} ; \quad \frac{10^{-6}}{10^3} ; \quad \frac{45^{-3}}{9^{-3}} ; \quad \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^4 \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^{-4}$$

Activités

Activité 6 : Simplifier les expressions suivantes :

$$(\sqrt{3})^{-3} \times (\sqrt{3})^5 ; (\sqrt{7})^4 \times \sqrt{7} \times (\sqrt{7})^{-6}$$

$$\frac{(\sqrt{5})^{10}}{(\sqrt{5})^4} ; ((\sqrt{6})^3)^{-4} ; (\sqrt{5})^4 \times (\sqrt{5})^4$$

Activité 7 : Ecris les nombres suivants sous forme : $a \times 10^n$, où n est un nombre entier relatif et a un nombre relatif avec : $1 \leq a < 10$

20000 ; 2500000 ; 0,008 ; 0,00043

Contenu de la leçon

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n ; \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \rightarrow \text{Puissances de même exposant}$$

*** Exemples :** $7^5 \times 7^{-9} = 7^{5+(-9)} = 7^{5-9} = 7^{-4}$

****** $\frac{3^{-4}}{3^6} = 3^{-4-6} = 3^{-10}$; ******* $(0,2^{-3})^4 = 0,2^{-3 \times 4} = 0,2^{-12}$

***** $2^3 \times (-5)^3 = (2 \times (-5))^3 = (-10)^3$; ****** $\frac{21^{-4}}{7^{-4}} = \left(\frac{21}{7}\right)^{-4} = 3^{-4}$

2) L'écriture scientifique :

*** Définition :** L'écriture scientifique d'un nombre décimal relatif est de la forme : $a \times 10^n$, où n est un nombre entier relatif et a un nombre relatif avec : $1 \leq a < 10$, (a entre 1 et 9,9).

*** Exemples :** $265900 = 2,659 \times 10^5$

****** $-8145 \times 10^{-6} = -8,145 \times 10^3 \times 10^{-6} = -8,145 \times 10^{-3}$

******* $0,0005321 = 5,321 \times 10^{-4}$

******** $-0,00965 \times (10^{-2})^5 = -9,65 \times 10^{-3} \times 10^{-10} = -9,65 \times 10^{-13}$

Evaluation

Exercice 10 : Ex:30 – p :18 (Puissances de 10)

Exercice 11 : Ecris les nombres suivants sous la forme de a^n :

$$((-1,5)^3)^4 \times ((-2)^6)^2 ; \frac{3^5 \times (3^{-2})^{-4}}{3}$$

$$\left(\left(\frac{7}{4}\right)^{-5}\right)^{-3} \times \left(\left(\frac{7}{4}\right)^{-2}\right)^4 ; \frac{7^{-2} \times 7^5}{7^8} ;$$

$$\frac{5^{-2} \times 4^8}{5^{-5} \times 4^5} ; \left(\sqrt{2}^{-2} \times \frac{1}{\sqrt{2}^5}\right)^{-7}$$

Exercice 12 : Ex:17 – p:18 (L'écriture scientifique)

Exercice 13 : Ex:40 et 41 – p:20 (L'écriture scientifique)