3ème - Ecritures littérales, identités remarquables

Extrait du programme de la classe de Troisième :

CONTENU	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Écritures littérales ; identités remarquables	Factoriser des expressions telles que : $(x+1)(x+2)-5(x+2)$; $(2x+1)^2+(2x+1)(x+3)$ Connaître les égalités : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. et les utiliser sur des expressions numériques ou littérales simples telles que : $101^2=(100+1)^2=100^2+200+1$; $(x+5)^2-4=(x+5)^2-2^2=(x+5+2)(x+5-2)$	La reconnaissance de la forme d'une expression algébrique faisant intervenir une identité remarquable peut représenter une difficulté qui doit être prise en compte. Les travaux s'articuleront sur deux axes : – utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques ; – utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes. Les activités viseront à assurer la maîtrise du développement d'expressions simples ; en revanche, le travail sur la factorisation qui se poursuivra au lycée, ne vise à développer l'autonomie des élèves que dans des situations très simples. On consolidera les compétences en matière de calcul sur les puissances, notamment sur les puissances de 10.

11.1 Développer un produit

Définition

Développer un produit signifie le transformer en une **somme algébrique**

*Rappel : une **somme algébrique** est une suite d'additions et de soustractions, impliquant des nombres et/ou des lettres*

Nous avons, pour réaliser cela, plusieurs moyens à disposition :

11.1.1 Distributivité simple

Produit	$\rightarrow$	**Somme algébrique**
$k(a+b)$	$\rightarrow$	$ka+kb$
$k(a-b)$	$\rightarrow$	$ka-kb$

Applications et exemples :

– **Calcul mental :**

▶ $13\times 99 \;=\; 13\times(100-1) \;=\; 13\times 100-13\times 1 \;=\; 1300-13 \;=\; 1287$

▶ $25\times 104 \;=\; 25\times(100+4) \;=\; 25\times 100+25\times 4 \;=\; 2500+100 \;=\; 2600$

– **Développement d'une expression littérale :**

▶ $3(5a+7) \;=\; 3\times 5a+3\times 7 \;=\; 15a+21$

▶ $-2(5-4x) \;=\; -2\times 5-(-2)\times 4x \;=\; -10+8x$

11.1.2 Distributivité double

Produit	$\rightarrow$	**Somme algébrique**
$(a+b)(c+d)$	$\rightarrow$	$ac+ad+bc+bd$

Applications et exemples :

Développement d'une expression littérale :

▶ $(3-a)(4a+2) \;=\; 3\times 4a \,+\, 3\times 2 \,-\, a\times 4a \,-\, a\times 2 \;=\; 12a+6-4a^2-2a \;=\; -4a^2+10a+6$

▶ $(3x-2)(1-4x) \;=\; 3x\times 1 \,+\, 3x\times(-4x) \,-\, 2\times 1 \,-\, 2\times(-4x) \;=\; 3x-12x^2-2+8x \;=\; -12x^2+11x-2$

⚠ : **Pour ne pas se tromper dans les signes**, il est utile de se souvenir que, par exemple, $3x-2$ est la somme de $3x$ et de -2, et que $1-4x$ est la somme de 1 et de $-4x$. Ainsi, pour le calcul précédent, on a :

$(3x-2)(1-4x) \;=\; (3x+(-2))\,(1+(-4x)) = (3x)\times 1 \,+\, (3x)\times(-4x) \,+\, (-2)\times 1 \,+\, (-2)\times(-4x) \;=\; \ldots$

11.1.3 Identités remarquables

Produit	→	**Somme algébrique**
	Carré d'une somme	
$(a+b)^2$	→	$a^2+2ab+b^2$
	Carré d'une différence	
$(a-b)^2$	→	$a^2-2ab+b^2$
	Produit d'une somme par une différence	
$(a-b)(a+b)$	→	a^2-b^2

Applications et exemples :

– **Calcul mental :**
- ▶ $101^2 = (100+1)^2 = 100^2+2\times 100+1^2 = 10000+200+1 = 10201$
- ▶ $19^2 = (20-1)^2 = 20^2-2\times 20+1^2 = 400-40+1 = 361$
- ▶ $39\times 41 = (40-1)(40+1) = 40^2-1^2 = 1600-1 = 1599$

– **Développement d'une expression littérale :**
- ▶ $(y+7)^2 = y^2+2\times y\times 7+7^2 = y^2+14y+49$
- ▶ $(1-3x)^2 = 1^2-2\times 1\times 3x+(3x)^2 = 1-6x+9x^2$
- ▶ $(20-8x)(20+8x) = 20^2-(8x)^2 = 400-64x^2$

11.2 Factoriser une somme algébrique

Définition

Factoriser une somme algébrique signifie la transformer en **produit**

En fait, pour résumer :

$$\begin{tikzcd} \text{Produit} \arrow[r, bend left, "\text{Développer}"] & \text{Somme algébrique} \arrow[l, bend left, "\text{Factoriser}"] \end{tikzcd}$$

11.2.1 Avec un facteur commun

On utilise la propriété de simple distributivité, mais "à l'envers" :

Somme algébrique	$\rightarrow$	Produit
$\underline{k}a+\underline{k}b$	$\rightarrow$	$\underline{k}(a+b)$
$\underline{k}a-\underline{k}b$	$\rightarrow$	$\underline{k}(a-b)$

Dans les sommes algébriques de gauche, il y a deux termes, chacun étant un produit de deux facteurs. Comme k se retrouve dans les deux termes, on dit que c'est un **facteur commun** aux deux termes. On dit également que l'on a "**mis k en facteur**".

Applications et exemples :

– **Calcul mental :**
  - ▶ $13\times 62+13\times 38 = 13\times(62+38) = 13\times 100 = 1300$
  - ▶ $18.1\times 34.8-8.1\times 34.8 = (18.1-8.1)\times 34.8 = 10\times 34.8 = 348$

– **Factorisation d'une expression littérale grâce à un facteur commun :**
  - ▶ $4a^2+3a = 4\times a\times a+3\times a = a(4a+3)$
  - ▶ $(x+7)(5-4x)-2(5-4x) = (5-4x)\times(x+7-2) = (5-4x)(x+5)$
  - ▶ $(x+3)^2-5(x+3) = (x+3)\times(x+3-5) = (x+3)(x-2)$

11.2.2 Avec les identités remarquables

Là aussi, on utilise les identités remarquables vues au paragraphe 1.3, mais "dans l'autre sens" :

Somme algébrique	$\rightarrow$	Produit
$a^2+2ab+b^2$	$\rightarrow$	$(a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2$	$\rightarrow$	$(a-b)^2$
a^2-b^2	$\rightarrow$	$(a-b)(a+b)$

Applications à la factorisation d'expressions littérales :

- ▶ $y^2+4y+4 = y^2 + 2\times y\times 2 + 2^2 = (y+2)^2$
- ▶ $9x^2-6x+1 = (3x)^2 - 2\times 3x\times 1 + 1^2 = (3x-1)^2$
- ▶ $(x+5)^2-9 = (x+5)^2-3^2 = [(x+5)-3]\times[(x+5)+3] = (x+2)\times(x+8)$