

Chapitre 02 : Développement et factorisation et identités remarquables

I - Rappel : vocabulaire :

1° Expression algébrique :

On appelle expression algébrique toute expression contenant à la fois des chiffres et des lettres.

* Exemples : $A = 2x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \sqrt{3}x + 1$

$B = (x^2 + 3)(-4x - 1)$

2° Expression numérique :

On appelle expression numérique toute expression ne contenant que des chiffres.

* Exemples : $C = 2\sqrt{7} + \frac{1}{2} - 11,5 + 17$

$D = (2\sqrt{3} - \frac{11}{3})(11 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{7}} + 1)$

3° Somme algébrique :

On appelle somme algébrique, toute expression algébrique ne contenant aucune parenthèse et écrite sous la forme d'une suite d'additions et de soustractions de nombres.

* Exemples : $E = 3x^2 + x\sqrt{3} - 11$

$F = \sqrt{2}x^5 - 4x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + \sqrt{7}$

4° Réduire (simplifier) une expression algébrique :

Réduire une expression algébrique, c'est la simplifier en regroupant les termes qui se ressemblent du plus petit au plus grand exposant.

* Exemples :

$$\begin{aligned} G &= 3x^2 - 2x + 4 - 5x^2 + 1 + 7x + x^3 \\ &= x^3 + 3x^2 - 5x^2 - 2x + 7x + 4 + 1 \\ &= x^3 - 2x^2 + 5x + 5 \end{aligned}$$

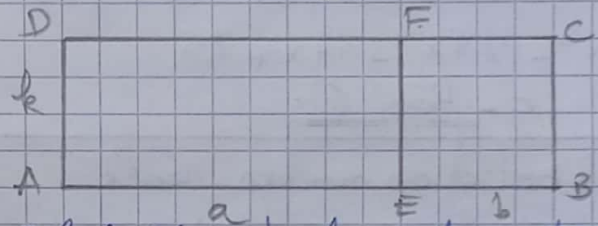
$$\begin{aligned} H &= 3x - 2x^3 + 2x + x^3 - 11 - 5x + 7 \\ &= -2x^3 + x^3 + 3x + 2x - 5x - 11 + 7 \\ &= -x^3 - 4 \end{aligned}$$

II - Développement et factorisation :

1° Activité :

ABCD et AEFD deux rectangles tel que :

$AB = k, AE = a, BE = b$



1) Calculer l'aire de chacun des rectangles ABCD et AEFD et EBCF

2) Démontrer que : $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

Solution :

1) L'aire du rectangle AEFD est :

$S_1 = AE \times AD = k \times a$

L'aire du rectangle EBCF est :

$S_2 = EF \times EB = k \times b$

L'aire du rectangle ABCD est :

$S = AD \times AB = k \times (a + b)$

2) L'aire du rectangle ABCD est la

somme des aires des rectangles AEFD et EBCF

donc : $S = S_1 + S_2$

Alors : $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

2° Développement :

a - Définition :

Le développement est l'écriture d'un produit sous forme d'une somme ou différence

b - Règle ① :

k, a et b des nombres réels.

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$

* Exemples:

$$A = 2x(x+4)$$

$$= 2x \times x + 2x \times 4$$

$$= 2x^2 + 8x$$

$$B = (-3x-5) \times (-4x)$$

$$= -3x \times (-4x) - 5 \times (-4x)$$

$$= 12x^2 + 20x$$

$$C = 3x(2x^2 - x + 2) - 5(3x^2 + 4x - 5)$$

$$= 6x^3 - 3x^2 + 6x - 15x^2 - 20x + 25$$

$$= 6x^3 - 3x^2 - 15x^2 + 6x - 20x + 25$$

$$= 6x^3 - 18x^2 - 14x + 25$$

c - Règle 2:

a, b, c et d des nombres réels.

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$$

$$= ac + ad + bc + bd$$

* Exemples:

$$A = (3\sqrt{2} - 1)(2 + \sqrt{2})$$

$$= 3\sqrt{2} \times 2 + 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 1 \times 2 - 1 \times \sqrt{2}$$

$$= 6\sqrt{2} + 3 \times 2 - 2 - \sqrt{2}$$

$$= 6\sqrt{2} - \sqrt{2} + 6 - 2$$

$$= 5\sqrt{2} + 4$$

$$B = (2-x)(3x+1)$$

$$= 2 \times 3x + 2 \times 1 - x \times 3x - x \times 1$$

$$= 6x + 2 - 3x^2 - x$$

$$= -3x^2 + 6x - x + 2$$

$$= -3x^2 + 5x + 2$$

$$C = 3x(2x+1) + (3x-2)(x+2)$$

$$= 6x^2 + 3x + 3x^2 + 21x - 2x - 14$$

$$= 6x^2 + 3x^2 + 3x + 21x - 2x - 14$$

$$= 9x^2 + 22x - 14$$

3) Factorisation:

a - Définition:

La factorisation est l'écriture d'une somme ou différence sous forme d'un produit.

b - Règle:

k, a et b des nombres réels.

$$k \times a + k \times b = k \times (a+b)$$

$$k \times a - k \times b = k \times (a-b)$$

Remarque importante:

Pour factoriser une expression algébrique, on cherche un facteur commun, après on simplifie l'intérieur des parenthèses.

* Exemples:

→ Cas 1: facteur commun sans parenthèses.

$$A = 2\sqrt{3}x - \sqrt{6}x^2$$

$$= 2\sqrt{3}x - \sqrt{2} \times \sqrt{3}x^2$$

$$= \sqrt{3}x(2 - \sqrt{2}x)$$

$$B = 3x^2 - 9x = 3x \times x - 3x \times 3 = 3x(x-3)$$

→ Cas 2: facteur commun avec parenthèses.

$$C = (2x+1)(5-x) - (2x+1)(7x+3)$$

$$= (2x+1)[(5-x) - (7x+3)]$$

$$= (2x+1)(5-x-7x-3)$$

$$= (2x+1)(2-8x)$$

$$D = (x+3)^2 + 2x(x+3) + (x+3)$$

$$= (x+3)(x+3) + 2x(x+3) + (x+3) \times 1$$

$$= (x+3)(x+3+2x+1)$$

$$= (x+3)(3x+2)$$

→ Cas 3: factorisation double.

$$E = 7(x-1) + 2x^2 - 2x$$

$$= 7(x-1) + 2x(x-1)$$

$$= (x-1)(7+2x)$$

$$F = -4x^2 + 2x + (-2x^3 + x^2)$$

$$= 2x(-2x+1) + x^2(-2x+1)$$

$$= (1-2x)(2x+x^2)$$

II) Identités remarquables.

1) Propriétés:

a, b deux nombres réels

Developpement

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

← factorisation

2) Exemples:

Identités remarquables et développement:

$$\begin{aligned} A &= (x+1)^2 \\ &= x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (2x+3)^2 \\ &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (x-5)^2 \\ &= x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 \\ &= x^2 - 10x + 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (5-7x)^2 \\ &= 5^2 - 2 \times 5 \times 7x + (7x)^2 \\ &= 25 - 70x + 49x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= (2x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{5}) \\ &= (2x)^2 - (\sqrt{5})^2 \\ &= 4x^2 - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= (2\sqrt{7}x - 3\sqrt{5})(2\sqrt{7}x + 3\sqrt{5}) \\ &= (2\sqrt{7}x)^2 - (3\sqrt{5})^2 \\ &= 28x^2 - 45 \end{aligned}$$

Identités remarquables et factorisation:

$$\begin{aligned} A &= x^2 + 6x + 9 \\ &= x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 \\ &= (x+3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 25x^2 + 30x + 9 \\ &= (5x)^2 + 2 \times 5x \times 3 + 3^2 \\ &= (5x+3)^2 \end{aligned}$$

$$C = x^2 - 4x + 4$$

$$\begin{aligned} &= x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 \\ &= (x-2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 49x^2 - 56x + 16 \\ &= (7x)^2 - 2 \times 7x \times 4 + 4^2 \\ &= (7x-4)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 16x^2 - \frac{1}{4} \\ &= (4x)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(4x - \frac{1}{2}\right)\left(4x + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 144x^2 - 49 \\ &= (12x)^2 - 7^2 \\ &= (12x-7)(12x+7) \end{aligned}$$

Identités remarquables et double factorisation:

$$\begin{aligned} A &= 4x^2 + 4x + 1 - (10x+5) \\ &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 - 5(2x+1) \\ &= (2x+1)^2 - 5(2x+1) \\ &= (2x+1)(2x+1-5) \\ &= (2x+1)(2x-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}(-x^2 - x)(2x-8) + x^2 - 8x + 16 \\ &= \frac{1}{2} \times 2(-x^2 - x)(x-4) + x^2 - 8x + 16 \\ &= (-x^2 - x)(x-4) + (x-4)^2 \\ &= (x-4)(-x^2 - x + x - 4) \\ &= (x-4)(-x^2 - 4) \\ &= -(x-4)(x^2 + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (3x-1)^2 - (2-x)^2 \\ &= [(3x-1) - (2-x)][(3x-1) + (2-x)] \\ &= (3x-1-2+x)(3x-1+2-x) \\ &= (4x-3)(2x+1) \end{aligned}$$

3) Exercice d'application:

1°) Développer et simplifier.

$$A = (2x+1)^2 - (3x+5)(3x-5)$$

$$B = (7-2x)^2 + 4x(1-x)$$

2°) Factoriser ce qui suit.

$$C = 25x^2 - 4 + (5x-2)(5x+7)$$

$$D = 9x^2 - 6x + 1 + 5x(3x-1)$$

Solution:

$$\begin{aligned}
 1) A &= (2x+1)^2 - (3x+5)(3x-5) \\
 &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 - ((3x)^2 - 5^2) \\
 &= 4x^2 + 4x + 1 - (9x^2 - 25) \\
 &= 4x^2 + 4x + 1 - 9x^2 + 25 \\
 &= 4x^2 - 9x^2 + 4x + 1 + 25 \\
 &= -5x^2 + 4x + 26
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= (7-2x)^2 + 4x(1-x) \\
 &= 7^2 - 2 \times 7 \times 2x + (2x)^2 + 4x \times 1 - 4x \times x \\
 &= 49 - 28x + 4x^2 + 4x - 4x^2 \\
 &= 4x^2 - 4x^2 - 28x + 4x + 49 \\
 &= -24x + 49
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= 25x^2 - 4 + (5x-2)(5x+7) \\
 &= (5x)^2 - 2^2 + (5x-2)(5x+7) \\
 &= (5x-2)(5x+2) + (5x-2)(5x+7) \\
 &= (5x-2)[(5x+2) + (5x+7)] \\
 &= (5x-2)(5x+2+5x+7) \\
 &= (5x-2)(10x+9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= 9x^2 - 6x + 1 + 5x(3x-1) \\
 &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 + 5x(3x-1) \\
 &= (3x-1)^2 + 5x(3x-1) \\
 &= (3x-1)(3x-1+5x) \\
 &= (3x-1)(8x-1)
 \end{aligned}$$