

Chapitre ① : Les racines carrées

I - La racine carrée d'un nombre

réel positif :

1) Activité ① :

1°/ En utilisant la calculatrice, remplir le tableau suivant :

x	0	1	144	0,64	$\frac{81}{49}$
$\sqrt{x}$	0	1	12	$\frac{4}{5} = 0,8$	$\frac{9}{7}$

2°/ Remplir le vide par ce qui convient :

$\ast (3)^2 = 9$ $\ast (\sqrt{7})^2 = 7$ $\ast (\frac{5}{6})^2 = \frac{25}{36}$
 $\ast (\sqrt{5})^2 = 5$ $\ast (\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$ $\ast (\frac{-1}{3})^2 = \frac{1}{9}$

2°) Définition :

Soit a un nombre réel positif ou nul (c'est à dire $a \geq 0$)

La racine carrée de a c'est le nombre réel positif dont le carré est égale à a noté $\sqrt{a}$

⇒ Résultat :
a un nombre réel positif

$$\sqrt{a^2} = a, \quad \sqrt{a}^2 = a$$

* Remarques importantes :

* $\sqrt{a}$ n'a pas de sens que si $a \geq 0$
càd la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas

* La racine carrée d'un nombre n'est jamais égale à un nombre négatif

* L'opposé de $\sqrt{a}$ (avec $a \geq 0$) est : $-\sqrt{a}$
(l'opposé de $\sqrt{11}$ est $-\sqrt{11}$)

* $\sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{1} = 1$

3°) Exemples :

$\ast \sqrt{0} = 0$ car $0^2 = 0$
 $\ast \sqrt{1} = 1$ car $1^2 = 1$
 $\ast \sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$
 $\ast \sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$
 $\ast \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ car $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

* A apprendre par cœur : (Carrés parfaits)

$\ast \sqrt{0} = 0$ $\ast \sqrt{49} = 7$ $\ast \sqrt{69} = 13$
 $\ast \sqrt{1} = 1$ $\ast \sqrt{64} = 8$ $\ast \sqrt{196} = 14$
 $\ast \sqrt{4} = 2$ $\ast \sqrt{81} = 9$ $\ast \sqrt{225} = 15$
 $\ast \sqrt{9} = 3$ $\ast \sqrt{100} = 10$ $\ast \sqrt{256} = 16$
 $\ast \sqrt{16} = 4$ $\ast \sqrt{121} = 11$ $\ast \sqrt{289} = 17$
 $\ast \sqrt{25} = 5$ $\ast \sqrt{144} = 12$ $\ast \sqrt{324} = 18$
 $\ast \sqrt{36} = 6$ $\ast \sqrt{400} = 20$ $\ast \sqrt{361} = 19$

* Exercice d'application :

$\ast \sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$
 $\ast \sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{(\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{3}$
 $\ast \sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{(\frac{4}{5})^2} = \frac{4}{5}$
 $\ast \frac{3}{\sqrt{81}} = \frac{3}{\sqrt{9^2}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
 $\ast \sqrt{\frac{0,36}{0,25}} = \sqrt{(\frac{0,6}{0,5})^2} = \frac{0,6}{0,5} = \frac{6}{5}$
 $\ast \frac{\sqrt{121}}{4} = \frac{\sqrt{11^2}}{4} = \frac{11}{4}$

4°) Le carré d'une racine carrée :

a. Propriété :

a un nombre réel.

$\ast \text{Si } a \geq 0 : \sqrt{a^2} = \sqrt{a}^2 = a$
 $\ast \text{Si } a < 0 : \sqrt{a^2} = \sqrt{a}^2 = -a$

b- Exemples:

$$\begin{aligned} * \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} &= \frac{3}{2} \\ * \sqrt{\frac{11}{5}} &= \frac{11}{5} \\ * \sqrt{\sqrt{9}} &= \sqrt{9} = 3 \\ * \sqrt{(-3)^2} &= 3 \\ * \sqrt{\left(\frac{-6}{7}\right)^2} &= \frac{6}{7} \end{aligned}$$

c- Exercice d'application:

Simplifier ce qui suit:

$$\begin{aligned} * \sqrt{\sqrt{16}} & \quad * \sqrt{(7+\sqrt{2})^2} \\ * \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{7}} & \quad * \sqrt{\sqrt{5}^2} \\ * \sqrt{7+\sqrt{2}} & \quad * \sqrt{(-7-\sqrt{5})^2} \end{aligned}$$

Solution:

$$\begin{aligned} * \sqrt{\sqrt{16}} &= \sqrt{4^2} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2 \\ * \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{7}} &= \frac{\sqrt{2}}{7} \\ * \sqrt{7+\sqrt{2}} &= \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3 \\ * \sqrt{(7+\sqrt{2})^2} &= 7+\sqrt{2} \\ * \sqrt{\sqrt{5}^2} &= \sqrt{5} = 5 \\ * \sqrt{(-7-\sqrt{5})^2} &= -(-7-\sqrt{5}) = 7+\sqrt{5} \\ &\text{car } -7-\sqrt{5} < 0 \end{aligned}$$

II - Résolution de l'équation $x^2 = a$.

1°/ Si $a > 0$

L'équation $x^2 = a$ est respectivement équivalente à

$$x^2 - a = 0$$

$$x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$$

$$x - \sqrt{a} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{a} = 0$$

$$x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

Cette équation admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

2°/ Si $a = 0$

L'équation $x^2 = a$ est respectivement équivalente à

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Cette équation admet unique solution 0

3°/ Si $a < 0$

L'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

* Règle:

Solution	Si $a = 0$	L'équation admet unique solution 0
de l'équation $x^2 = a$	Si $a > 0$	L'équation admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
	Si $a < 0$	L'équation n'admet pas de solution.

4°/ Exercice d'application:

Résoudre les équations suivantes:

$$\begin{aligned} * 2x^2 &= 6 & * -13 + x^2 &= -4 \\ * 3x^2 + 15 &= 3 & * 2(x^2 - 1) &= -2 \end{aligned}$$

Solution:

* L'équation $2x^2 = 6$ est respectivement équivalente à

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{6}{2} \\ x^2 &= 3 \end{aligned}$$

$$x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}$$

Cette équation admet deux solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$

* L'équation $-13 + x^2 = -4$ est respectivement équivalente à

$$\begin{aligned} x^2 &= -4 + 13 \\ x^2 &= 9 \end{aligned}$$

$$x = \sqrt{9} \text{ ou } x = -\sqrt{9}$$

$$x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Cette équation admet deux solutions 3 et -3

* L'équation $3x^2 + 15 = 3$ est respectivement

$$\begin{aligned} \text{équivalente à } 3x^2 &= 3 - 15 \\ 3x^2 &= -12 \\ x^2 &= \frac{-12}{3} \\ x^2 &= -4 \end{aligned}$$

Donc cette équation n'admet pas de solution.

* L'équation $2(x^2-1)=-2$ est respectivement équivalente

$$\begin{aligned} 2x^2-2 &= -2 \\ 2x^2 &= -2+2 \\ 2x^2 &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

La solution de cette équation est le nombre 0

III - Les opérations sur les racines carrées:

1°) Racine carrée et produit:

a - Propriété ①:

Soient a et b deux nombres réels positifs.

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

* Exemples:

$$\begin{aligned} * \sqrt{2} \times \sqrt{6} &= \sqrt{2 \times 6} = \sqrt{12} \\ * \sqrt{3} \times \sqrt{12} &= \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6 \\ * \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} &= \sqrt{2 \times 5 \times 10} = \sqrt{100} \\ &= 10 \\ * \sqrt{125} &= \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

b - ~~Propriété~~ ②: Extraire un carré parfait.

Soient a et b deux nombres réels positifs non nuls.

$$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$$

* Exemples:

$$\begin{aligned} * \sqrt{3^2 \times 7} &= 3\sqrt{7} \\ * \sqrt{25 \times 7} &= \sqrt{5^2 \times 7} = 5\sqrt{7} \\ * \sqrt{49 \times 5} &= \sqrt{7^2 \times 5} = 7\sqrt{5} \\ * \sqrt{8} &= \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2} \\ * \sqrt{45} &= \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{3^2 \times 5} = 3\sqrt{5} \\ * \sqrt{2^2 \times 5^2 \times 3} &= 2 \times 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \\ * \sqrt{3^2 \times 7} \times \sqrt{2^2 \times 3} &= 3\sqrt{7} \times 2\sqrt{3} = 3 \times 2\sqrt{7 \times 3} \\ &= 6\sqrt{21} \\ * \sqrt{5^3} &= \sqrt{5^2 \times 5} = 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

* Techniques et astuces:

1°) Décomposition:

Simplifions $\sqrt{180}$, pour cela on décompose 180

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

donc $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

donc $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5}$

$$= 2 \times 3 \sqrt{5}$$

$$= 6\sqrt{5}$$

2°) Racines carrées et puissances:

$$A = \sqrt{5^6} = \sqrt{(5^3)^2} = 5^3 = 125$$

$$B = \sqrt{7^5} = \sqrt{7^4 \times 7} = \sqrt{(7^2)^2 \times 7} = 7^2 \sqrt{7} = 49\sqrt{7}$$

C - Exercice d'application:

Simplifier et calculer

$$a = \sqrt{3^4 \times 5^2 \times 2^4}$$

$$b = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$$

$$c = (3\sqrt{2} + \sqrt{5})(3\sqrt{2} - \sqrt{5})$$

$$d = \sqrt{25} + \sqrt{81} - 2\sqrt{9}$$

$$e = \sqrt{96} + 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54}$$

* Solution:

$$a = \sqrt{3^4 \times 5^2 \times 2^4}$$

$$= \sqrt{3^2 \times 5^2 \times 2^6 \times 2}$$

$$= \sqrt{3^2 \times 5^2 \times (2^3)^2 \times 2}$$

$$= 3 \times 5 \times 2^3 \sqrt{2}$$

$$a = 120\sqrt{2}$$

$$b = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$$

$$c = (3\sqrt{2} + \sqrt{5})(3\sqrt{2} - \sqrt{5})$$

$$= (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$= 9 \times 2 - 5$$

$$= 18 - 5 = 13$$

$$d = \sqrt{25} + \sqrt{81} - 2\sqrt{9}$$

$$= \sqrt{5^2} + \sqrt{9^2} - 2\sqrt{3^2}$$

$$= 5 + 9 - 2 \times 3 = 14 - 6 = 8$$

$$\begin{aligned}
 c &= \sqrt{96} + 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54} \\
 &= \sqrt{6 \times 6 \times 4} + 2\sqrt{4 \times 6} - 3\sqrt{9 \times 6} \\
 &= \sqrt{4^2 \times 6} + 2\sqrt{2^2 \times 6} - 3\sqrt{3^2 \times 6} \\
 &= 4\sqrt{6} + 2 \times 2\sqrt{6} - 3 \times 3\sqrt{6} \\
 &= (4 + 4 - 9)\sqrt{6} = -\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

2/ Racine carrée et division:

a- Propo ①:

Soient a et b deux nombres réels positifs et $b \neq 0$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

* Exemples:

$$* \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$* \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$$

$$* \sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$* -\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{\frac{60}{5}} = -\sqrt{12} = -\sqrt{2^2 \times 3} = -2\sqrt{3}$$

b- Propo ②:

Soient a et b deux nombres réels positifs et $b \neq 0$

$$\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b} \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

* Exemples:

$$* \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

$$* \sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$* \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad * \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$* \sqrt{\frac{7}{25}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{7 \times 5}}{5} = \frac{\sqrt{35}}{5}$$

3/ Suppression de la racine du dénominateur (Rendre le dénominateur rationnel)

a- Cas ①: Dénominateur ne

contenant pas + ou - :

$$* \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$* \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \times 2}}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$* \frac{5\sqrt{2}}{2+\sqrt{7}} = \frac{5 \times 2}{\sqrt{11}(2+\sqrt{7})} = \frac{2\sqrt{11} + \sqrt{77}}{33}$$

b- Cas ②: Dénominateur contenant + et

Définition: Le conjugué

Soient a et b deux nombres réels positifs strictement

Le conjugué de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

Le conjugué de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

On dit que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

sont conjugués entre eux

$$\text{et } (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = a - b$$

* Exemples:

$$* \frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{3 \times (\sqrt{2} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})} = \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{\sqrt{2}^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{2 - 5}$$

$$= \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{-3} = -(\sqrt{2} - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$* \frac{\sqrt{3}}{4 - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}(4 + \sqrt{6})}{(4 - \sqrt{6})(4 + \sqrt{6})}$$

$$= \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{18}}{4^2 - \sqrt{6}^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{3^2 \times 2}}{16 - 6}$$

$$= \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{10}$$