III – Racines carrées

1. Définitions

Définition

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif noté $\sqrt{a}$ dont le carré est égal à a.

Exemple : $\sqrt{16} = 4$ *car* $4^2 = 16$.

Remarque

La racine carrée d'un négatif ne sera pas vue au collège. La calculatrice affiche même une erreur en cas de calcul d'une racine carrée d'un nombre négatif !

Propriété

a est un nombre positif. Alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Exemples :

$$\sqrt{3^2} = 3 \qquad \sqrt{2,4^2} = 2,4 \qquad \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7 \qquad \left(\sqrt{3,8}\right)^2 = 3,8 \qquad \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 = \frac{3}{5}$$

■ **EXERCICE :** Développer les expressions $(3+\sqrt{2})^2$; $(2\sqrt{5}-4)^2$ et $(6\sqrt{2}+\sqrt{7})(6\sqrt{2}-\sqrt{7})$.

Solution : On applique dans l'ordre les identités remarquables 1, 2 puis 3 :

$$\begin{aligned}(3+\sqrt{2})^2 &= 3^2+2\times 3\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2\\ &= 9+6\sqrt{2}+2\\ &= 11+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2\sqrt{5}-4)^2 &= (2\sqrt{5})^2-2\times\sqrt{5}\times 4+4^2\\ &= 4\times 5-8\sqrt{5}+16\\ &= 36-8\sqrt{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6\sqrt{2}+\sqrt{7})(6\sqrt{2}-\sqrt{7}) &= (6\sqrt{2})^2-(\sqrt{7})^2\\ &= 6^2\times(\sqrt{2})^2-7\\ &= 36\times 2-7\\ &= 72-7\\ &= 65.\end{aligned}$$

2. Opérations sur les racines carrées

Propriété

a **et** ***b*** **sont des nombres positifs non nuls.**

$$\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples :

- $\sqrt{12}\times\sqrt{3} = \sqrt{12\times 3} = \sqrt{36} = 6$
- $\sqrt{5}\times\sqrt{4} = \sqrt{5\times 4} = \sqrt{20}$
- $\sqrt{14} = \sqrt{7\times 2} = \sqrt{7}\times\sqrt{2}$
- $\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\dfrac{60}{15}} = \sqrt{4} = 2$
- $\sqrt{\dfrac{49}{81}} = \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \dfrac{7}{9}$
- $\sqrt{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \dfrac{2}{5}$

3. Simplifications

Méthode (Écrire une racine carrée sous la forme $a\sqrt{b}$)

Pour écrire $\sqrt{50}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b des nombres entiers et b le plus petit possible, on procède de la manière suivante :

1. **On décompose le nombre sous la racine carrée en un produit/quotient dont l'un des nombres est un carré parfait (par exemple, $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$; ici $50 = 25 \times 2$).**
2. **On utilise les formules sur les racines carrés pour séparer la racine en deux.**
3. **On simplifie la racine carrée du nombre carré !**

Par exemple : $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

Exemple : Écrire $\sqrt{63}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b des nombres entiers et b le plus petit possible.

Réponse :

$$\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}.$$

Remarque

On ne peut pas calculer des nombres avec des racines carrées différentes (par exemple $3\sqrt{2} + 5\sqrt{7} \neq 8\sqrt{9}$!) De temps en temps, il faudra donc décomposer chaque racine carrée afin de faire apparaître *le même* carré parfait.

Exemple : Écrire $A = 2\sqrt{24} + 3\sqrt{216} - 10\sqrt{6}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b des nombes entiers et b le plus petit possible.

Réponse :

$$\begin{aligned}
A &= 2\sqrt{24} + 3\sqrt{216} - 10\sqrt{6} \\
&= 2\sqrt{4 \times 6} + 3\sqrt{36 \times 6} - 10\sqrt{6} \\
&= 2 \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{6} + 3 \times \sqrt{6^2} \times \sqrt{6} - 10\sqrt{6} \\
&= 2 \times 2\sqrt{6} + 3 \times 6\sqrt{6} - 10\sqrt{6} \\
&= 4\sqrt{6} + 18\sqrt{6} - 10\sqrt{6} \\
&= 12\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Problème ouvert : 104 p. 22