LES RACINES CARRÉES

1

Objectifs d'apprentissage

- Connaître que si 'a' désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est 'a'.
- Connaître et utiliser les égalités $\sqrt{a^2} = a$ et $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ où 'a' est un nombre positif.
- Utiliser les égalités : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ où a et b sont deux nombres positifs et b≠0 dans le dernier cas.
- Déterminer les nombres x tels que : $x^2 = a$
- Rendre rationnel le dénominateur d'un nombre réel.

Prérequis

- ⊗ Effectuer des calculs sur des nombres rationnels.
- ⊗ Puissances d'un nombre rationnel.
- ⊗ Equations.
- ⊗ Théorème de Pythagore

Gestion du temps

10 heures

Outils didactiques

- ♣ Tableau.
- ♣ Livre scolaire.
- ♣ Calculatrice.

◈ **Pr :** Abdelilah BOUTAYEB

◈ **Niveau :** 3ème APIC

◈ **Matière :** Mathématiques

◈ **Etablissement :** Collège Nahda

Activités

Activité 1 : **1)** Calcule ce qui suit : 3^2, 8^2, $(4/7)^2$, $(-2)^2$. ****** **2)** Ecris sous forme d'une puissance : 25, 100, 36.

Activité 2 : **1)** Trouve x tel que: $x^2=81$

2) Compléte le tableau à l'aide d'une calculatrice :

a	4	6	3	11
a^2	…..	…..	…..	…..
$\sqrt{a^2}$	…..	…..	…..	…..

3) D'après le tableau qu'est-ce que vous observez ?

Activité 3 : **1)** Calculez $\sqrt{4\times 9}$ et $\sqrt{4}\times\sqrt{9}$. Qu'est-ce que vous observez ?

2) Calculez $\sqrt{\frac{4}{9}}$ et $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$. Qu'est-ce que vous observez ?

3) Calculez $\sqrt{4+9}$ et $\sqrt{4}+\sqrt{9}$. Qu'est-ce que vous observez ?

Activité 4 : **1)** Montrez que : $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

Contenu de la leçon

I- Notion de racine carrée :

***Définition :** Soit a un nombre positif. La racine carrée de a, noté $\sqrt{a}$.,est le nombre positif dont le carrée est a.

Le symbole $\sqrt{\square}$ est appelé « radical »

***Règle :** Quel que soit a un nombre positif, on a : $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$.

***Exemples :** $\sqrt{7^2} = 7$; $(\sqrt{13})^2 = 13$; $(\sqrt{\frac{6}{15}})^2 = \frac{6}{15}$; $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$;

$\sqrt{\frac{36}{81}} = \sqrt{\frac{6^2}{9^2}} = \sqrt{(\frac{6}{9})^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$

***Remarque :** La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. ➔ $\cancel{\sqrt{-9}}$; $\cancel{\sqrt{-37}}$

II- Racines carrées et opérations :

1) Multiplication de racine carrée :

***Propriété 1 :** Soient a et b deux nombres positifs, on a : $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$.

***Exemples :** $\sqrt{3}\times\sqrt{7} = \sqrt{3\times 7} = \sqrt{21}$; $\sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

2) Quotient de racine carrée :

***Propriété 2 :** Soient a et b deux nombres positifs avec b≠0, on a :

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

***Exemples :** $\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$; $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

III- Rendre rationnel le dénominateur d'un nombre réel :

1) Première cas :

* $\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

Evaluation

Exercice 1 : Calcule ce qui suit : $\sqrt{16}$; $\frac{4}{\sqrt{36}}$; $\sqrt{21^2}$; $\sqrt{(-49)^2}$; $\frac{\sqrt{0.25}}{\sqrt{0.04}}$

Exercice 2 : Calcule ce qui suit : $5\sqrt{9}$; $-7\sqrt{(-4)^2}$; $\frac{\sqrt{9}+\sqrt{81}}{\sqrt{49}}$; $\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{9+\sqrt{49}}}}$

Exercice 3 : Simplifiez ce qui suit : $\sqrt{27}$; $\sqrt{50}$; $-\sqrt{48}$; $\sqrt{2}\times\sqrt{32}$; $\sqrt{\frac{4}{81}}$; $\sqrt{\frac{8}{18}}$; $\sqrt{\frac{9}{7}}\times\sqrt{7}$

Exercice 4 : Ecris chaque nombre sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un entier : $\sqrt{18}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{200}$; $\sqrt{72}$

Exercice 5 : Réduis ce qui suit :

$7\sqrt{3} - \sqrt{27} + 2\sqrt{12}$; $\sqrt{24} + 7\sqrt{6} - 2\sqrt{54}$;

$4\sqrt{7} - 8\sqrt{28} + \sqrt{700}$; $2\sqrt{18} + \sqrt{32} + 3\sqrt{2}$

Exercice 6 : Réduis ce qui suit :

$\sqrt{20} + 2\sqrt{45} - 3\sqrt{80}$; $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27}$;

$3\sqrt{8} + \sqrt{50} + 2\sqrt{32}$; $\sqrt{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{\frac{8}{27}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{50}{12}}$

Activités | Contenu de la leçon | Evaluation

Activité 5 : 1) Développer ce qui suit : (2-a)(2+a) ; (3+4a)(3-4a)

2) Montrez que : $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

Activité 6 : Trouvez x tel que : $x^2=9$; $x^2=6$; $x^2=0$; $x^2=-4$

** $\frac{3}{2\sqrt{5}}=\frac{3\times\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{2\times(\sqrt{5})^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2\times5}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$

*** $\frac{2+\sqrt{5}}{7\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{5})\times\sqrt{3}}{7\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\times\sqrt{3}+\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{7\times(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{15}}{7\times3}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{15}}{21}$

2) Deuxième cas : Utilisation du conjugué

✓ **N.B :** Le conjugué de (a+b) est (a-b), et le conjugué de (a-b) est (a+b).

* $\frac{2}{5-\sqrt{3}}=\frac{2\times(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})\times(5+\sqrt{3})}=\frac{2\times5+2\times\sqrt{3}}{5^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{10+2\sqrt{3}}{25-3}=\frac{10+2\sqrt{3}}{22}$

** $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}+1}=\frac{\sqrt{6}\times(\sqrt{7}-1)}{(\sqrt{7}+1)\times(\sqrt{7}-1)}=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{7}-\sqrt{6}\times1}{(\sqrt{7})^2-1^2}=\frac{\sqrt{42}-\sqrt{6}}{7-1}=\frac{\sqrt{42}-\sqrt{6}}{6}$

IV- Résolution d'équation $x^2 = a$:

***Règle :** - Si a>0, alors l'équation a deux solutions sont : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

- Si a=0, alors la solution de l'équation est 0.
- Si a<0, alors l'équation n'a pas de solution.

***Exemples :** Résolvez les équations suivantes : $x^2=11$; $x^2=-8$; $x^2=0$

* On a : $x^2=11$

Alors : $x=\sqrt{11}$ ou $x=-\sqrt{11}$

Donc l'équation a deux solutions sont : $\sqrt{11}$ et $-\sqrt{11}$

** On a : $x^2=-8$

Donc l'équation n'a pas de solution car : -8<0

*** On a : $x^2=0$

Donc la solution de l'équation est : 0

Exercice 7 : Eliminer le radical du dénominateur des fractions suivantes :

$\frac{3}{\sqrt{11}}$; $\frac{10}{2\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}}$; $\frac{-2\sqrt{3}}{5\sqrt{6}}$

Exercice 8 : Eliminer le radical du dénominateur des fractions suivantes :

$\frac{1}{\sqrt{3}+1}$; $\frac{2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; $\frac{14}{3\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$;

$\frac{5}{\sqrt{7}-2}-\frac{2}{\sqrt{7}}$; $\frac{3+\sqrt{5}}{7+\sqrt{5}}-\frac{3-\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}$; $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

Exercice 9 : Résolvez les équations suivantes : $x^2-25=0$; $x^2+9=0$; $5+x^2=5$;

$4x^2=16$; $\frac{x^2}{4}=5$; $9x^2-8=0$; $3x^2+4=0$;

$2x^2=6$; $\frac{2x^2}{3}=4$