Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

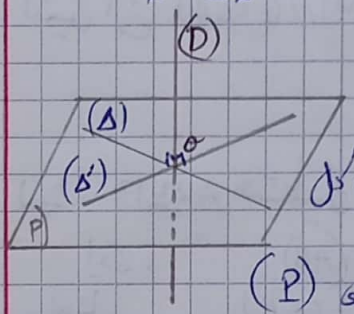
الدرس ⑧ : الهندسة الفضائية

I - تعامد مستقيم ومستوى :

1) تعريف :

نقول مستقيم (D) عمودي على مستوى (P) في نقطة O إذا كان عموديا في النقطة O على مستقيمين من (P) متقاطعين في O.

* الشكل الهندسي :



في الشكل : المستقيم (D) عمودي في النقطة O على كل المستقيمين (Δ) و (Δ') المتقاطعين ضمن المستوى (P)

إذن : $(D) \perp (P)$

بتعبير آخر

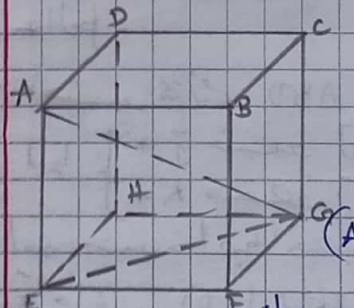
* $(D) \perp (\Delta)$ و $(D) \perp (\Delta')$ في النقطة O
* (Δ) و (Δ') ضمن المستوى (P)

إذن : $(D) \perp (P)$

* مثال :

مكعب ABCDEFGH

لنبين أن $(AE) \perp (EFGH)$



لدينا ABEF و ADHE مربعان

إذن

* (AE) عمودي على (EF) في E
* (AE) عمودي على (EH) في E
* (EF) و (EH) ينتميان إلى المستوى (EFGH) ويتقاطعان في النقطة E

إذن حسب خاصية التعريف :

$(AE) \perp (EFGH)$ في E

2) خاصيات :

أ - خاصية ① :

إذا كان المستقيم (D) عمودا على المستوى (P) في النقطة O، فإن المستقيم (D) عمودي على جميع المستقيمات الواقعة ضمن المستوى (P) والمارة من O

ب - مثال :

نعتبر المكعب ABCDEFGH السابق

لنبين أن المثلث AEG قائم الزاوية في E

لدينا : $(AE) \perp (EFGH)$ في E.

و بما أن المستقيم (EG) ضمن المستوى (EFGH)

و يمر من E فإن (AE) يمر من E

إذن حسب الخاصية ① فإن : $(AE) \perp (EG)$

وهذا يعني أن المثلث AEG قائم الزاوية في E

3) مبرهنة فيثاغورس في الفضاء :

أ - مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

* مثال :

الشكل جانبه يمثل هرما منتظما SABCD

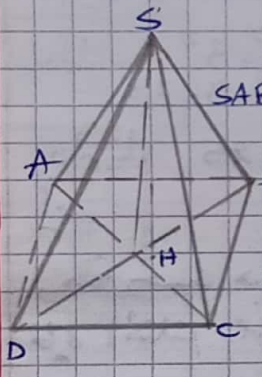
قاعدته عبارة عن مربع ABCD

وارتفاعه [SH] بحيث

$SH = 12cm$ ، $AC = BD = 12cm$

لنحسب BC و SC

حساب BC ←



ABCD مربع إذن المثلث ABC قائم الزاوية في B

ومنه حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن :

$BC^2 + AB^2 = AC^2$

(AB = BC لأن ABCD مربع) $BC^2 + BC^2 = AC^2$

$2BC^2 = AC^2$

$2BC^2 = 12^2$

$BC^2 = \frac{144}{2}$

$BC^2 = 72$

ومنه $BC = \sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$

حساب SC ←

لدينا [SH] ارتفاع الهرم SABCD

إذن [SH] عمودي على مستوى قاعدة ABCD

في H و بما أن (HC) ضمن (ABCD)

Talamid.ma للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

(SH) ⊥ (HC) : خاصية

ومنه فإن المثلث SHC قائم الزاوية في H

ومنه حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن:

$SH^2 + HC^2 = SC^2$

$HC = \frac{AC}{2}$ أي $SC^2 = 12^2 + 6^2$

$SC^2 = 144 + 36$

$SC^2 = 180$

$SC = \sqrt{180} = \sqrt{6^2 \times 5}$

$SH = 6\sqrt{5}$ ومنه فإن:

ب - مبرهنة فيثاغورس العكسية:

* مثال:

SABC رباعي وجه قاعدته المثلث ABC بحيث

$BC = 5cm$ و $AB = 4cm$ و $AC = 3cm$

لنبين أن المثلث ABC قائم الزاوية في A

لدينا: $AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2$

$= 16 + 9 = 25$

ولدينا: $BC^2 = 5^2 = 25$

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ إذن:

ومنه حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية

فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A

II - توازي مستقيم ومستوى في الفضاء:

1) تعريف:

نقول أن مستقيم (D) يوازي مستوى (P) إذا كانا لا يشتركان في أية نقطة.

* الشكل:

لدينا: (D) // (P)

2) خاصية ②

أ - خاصية ②:

(D) مستقيم و (P) مستوى في الفضاء.

يكون المستقيم (D) موازيا للمستوى (P) إذا كان يوجد في (P) مستقيما موازيا للمستقيم (D)

* الشكل:

((P) ⊃ (Δ)) (Δ) ⊂ (P) *

(Δ) // (D) *

إذن (D) // (P)

ب - مثال:

ABCDEFGH متوازي المستطيلات

لنبين أن (AB) // (EFGH)

لدينا ABEF مستطيل

إذن: (EF) // (AB)

ولدينا: (EF) ⊂ (EFGH)

إذن حسب الخاصية ②: (AB) // (EFGH)

ج - تمرين تطبيقي:

نعتبر الشكل جانبه بحيث J منتصف [AD] و K منتصف [AB]

لبين أن (JK) // (BCD)

* الحل:

نعتبر المثلث ABD

لدينا: J منتصف [AB] و K منتصف [AD]

إذن حسب خاصية المستقيم المارة منتصفي ضلعين:

(JK) // (BD) خاصة:

و (BD) ⊂ (BCD) بما أن:

(JK) // (BCD) فإن حسب الخاصية ② خاصة:

3) مبرهنة طاليس في الفضاء:

أ - الخاصية المباشرة:

* مثال:

نعتبر الهرم جانبه بحيث (KJ) // (BC)

$AB = 6$ و $AK = 2$ و $BC = 9$

أحسب KJ

Talamid.ma للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Réalisé par : Mr BENMASSER Jamal

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

نعتبر المثلث ABC

لدينا $K \in [AB]$ * و $J \in [AC]$ * و $(KJ) // (BC)$ حيث

إذن حسب خبرة طالس المباشرة فإن:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{KJ}{BC}$$

إذن:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{KJ}{BC}$$

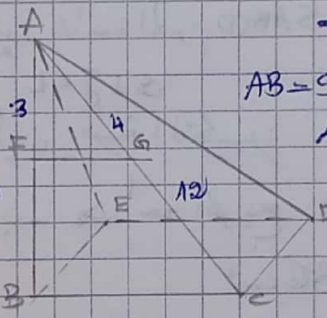
$$\frac{2}{6} = \frac{KJ}{9}$$

$$KJ = \frac{2 \times 9}{6} = \frac{18}{6}$$

$$KJ = 3$$ وبالتالي فإن:

ب - الخاصية العكسية

نعتبر الشكل جانبه



بحيث: $AF = 3$ و $AB = 9$

$AG = 4$ و $AC = 12$

بين أن $(FG) // (BC)$

لدينا: * $\frac{AF}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ و $\frac{AG}{AC} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

إذن: $\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC}$

نعتبر المثلث ABC

لدينا * $F \in [AB]$ النقط A, F, B على استقامة

* $G \in [AC]$ في ترتيب النقط A, G, C

و $\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC}$

إذن حسب خبرة طالس العكسية

فإن: $(FG) // (BC)$

III - التكبير والتصغير:

1) تعريف:

انطلاقا من شكل، نستخرج شكلا آخر بينهما تشابه وذلك بضرب أطوال الأول في عدد حقيقي موجب k يخالف 1

2) خاصيات:

* نحصل على شكل مكبر إذا كان $k > 1$.

نقول آنذاك أننا قمنا بتكبير نسبته k.

* نحصل على شكل مصغر إذا كان $k < 1$.

نقول آنذاك أننا قمنا بتصغير نسبته k.

* إذا كانت k هي نسبة التكبير $(k > 1)$،

فإن نسبة التصغير هي $\frac{1}{k}$

3) أثر التكبير والتصغير على المساحات والحجوم:

أ - خاصية ③:

عند تكبير أو تصغير مجسم في الفضاء بنسبة k فإن:

← الأطوال تضرب في العدد k

← المساحات تضرب في العدد k^2

← الحجوم تضرب في العدد k^3

بتعبير آخر:

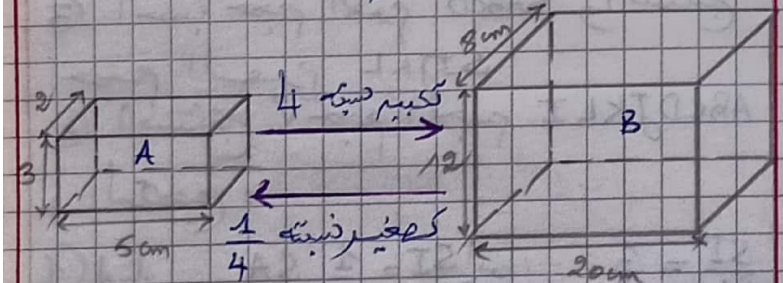
ℓ: الطول S: المساحة V: الحجم

الشكل الأصلي	بعد تصغير أو تكبير نسبته k	الشكل المحصل عليه
ℓ	$\ell' = k \times \ell$	ℓ'
S	$S' = k^2 \times S$	S'
V	$V' = k^3 \times V$	V'

ب - مثال:

متوازي المستطيلات B هو تكبير لمتوازي المستطيلات A ونسبة التكبير هي 4

لأن الأطوال ضربت في 4



* حساب مساحة A:

$$S = 2(ab + ac + bc) = 2(5 \times 3 + 5 \times 2 + 3 \times 2)$$

$$= 2 \times 31$$

$$S = 62 \text{ cm}^2$$

إذن حساب مساحة B:

$$S' = k^2 \times S = 4^2 \times 62$$

$$S' = 992 \text{ cm}^2$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع Talamid.ma
Réalisé par : M. BENMASSER Jamal

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

* حجم A هو:

$V = a \times b \times c = 5 \times 3 \times 2 = 30\,cm^3$

إذن حجم B هو:

$V' = k^3 \times V = 4^3 \times 30 = 1920\,cm^3$

* ملاحظة:

لتحديد نسبة التصغير أو التكبير، غالبا ما نستعمل مبرهنة طاليس المباشرة

4) تمرين تطبيقي:

الشكل جانبه يمثل هرما منتظما SABCD ارتفاعه [SO] وقاعدته ABCD عبارة عن مربع بحيث:

$SO = 4cm$ ، $BC = 6cm$

I و J و K و L نقط على التوالي من [SA] و [SB] و [SC] و [SD] بحيث:

$SI = SJ = SK = SL = \frac{1}{3} SA$

1) بين أن: $IJ = 2cm$

2) علما أن الهرم SABCD تكبير الهرم SIJKL

أ- حدد نسبته

ب- أحسب مساحة المربع ABCD واستنتج مساحة المربع IJKL

3) أحسب حجم الهرم SABCD واستنتج حجم الهرم SIJKL

4) استنتج V حجم المجسم ABCDJKLI

* التصحيح:

1) لدينا: $SI = \frac{1}{3} SA$ إذن: $\frac{SI}{SA} = \frac{1}{3}$

ولدينا: $SI = \frac{1}{3} SA = \frac{1}{3} SD$ لأن: $SA = SD$

إذن: $\frac{SJ}{SD} = \frac{1}{3}$

وحسب الحالة SAD من المثلث SAD و I ∈ [SA] و J ∈ [SD] لدينا: S و A و I على التوالي و S و D و J على التوالي

وحسب طالس المباشرة فإن: $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SD}$

إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية فإن: (IJ) // (AD)

وحسب طالس المباشرة فإن:

$\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SD} = \frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}$

إذن: $\frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}$ أي $\frac{IJ}{6} = \frac{1}{3}$ ($AD = BC = 6cm$)

$IJ = \frac{1}{3} \times 6$

$IJ = 2\,cm$ وهذا ما يثبت أن: $IJ = 2cm$

2) أ- لدينا الهرم SABCD تكبير للهرم SIJKL

إذن قاعدة الهرم SABCD تكبير لقاعدة الهرم SIJKL

أي نسبة التكبير $k = \frac{AD}{IJ} = \frac{6}{2} = 3$

ب- مساحة المربع ABCD هي:

$S = AB^2 = 6^2 = 36\,cm^2$

ولدينا المربع IJKL تصغير للمربع ABCD ونسبة التصغير هي $\frac{1}{3}$

ومنه مساحة المربع IJKL هي:

$S' = k^2 \times S = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 36 = \frac{36}{9}$

$S' = 4\,cm^2$

3) حجم الهرم SABCD هي:

$V = \frac{1}{3} \times SO \times AB^2 = \frac{1}{3} \times 4 \times 6^2 = 48\,cm^3$

ولدينا الهرم SIJKL تصغير للهرم SABCD ونسبة التصغير هي $\frac{1}{3}$

ومنه حجم الهرم SIJKL هو:

$V' = k^3 \times V = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 48 = \frac{16}{9}\,cm^3$

4) حجم المجسم ABCDJKLI هو V

لدينا: $V_{SABCD} = V + V_{SIJKL}$

ومنه: $V = V_{SABCD} - V_{SIJKL}$

$= 48 - \frac{16}{9} = \frac{432 - 16}{9} = \frac{416}{9}$

$V = \frac{416}{9}\,cm^3$

Talamid.ma للمزيد من الملفات تم بزيارة الموقع
Réalisé par : Mr BENMASSER Jamal