

النظـمات

نشاط تمهيدي

بينما كريم يمشي في الطريق التقى بشيخ يحمل سلتين من البيض فأراد أن يعرف عدد البيض في كل سلة ، فسأل الشيخ بعد إلقاء التحية فأجاب الشيخ قائلاً : لو أضفنا إلى السلة الأولى 20 بيضة سيصبح عدد البيض فيها يساوي ضعف ما في السلة الثانية . أما إذا جمعنا ما في السلتين من بيض حصلنا على 55 بيضة ، ساعد كريم للوصول إلى الحل .

I. نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

تعريف 1

مجموعة الأزواج $(x; y)$ التي تحقق المعادلتين $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ معا يطلق عليها مجموعة حلول النظمة $(\alpha) \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ النظمة (α) تسمى **نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين** .

II. حل نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

1 - الحل الجبري

أ . طريقة التعويض

تعريف 2

من إحدى المعادلتين نكتب أحد المجهولين بدلالة الآخر ثم نعوضه بتعبيره في المعادلة الأخرى .

$$\begin{cases} 2x-y=2 & (1) \\ x+y=1 & (2) \end{cases} \quad \text{مثال : حل النظمة التالية}$$

الحل

يكافئ $3x = 3$
 يكافئ $\frac{1}{3} \times 3x = \frac{1}{3} \times 3$
 يكافئ $x = 1$
 . نعوض x بقيمته في المعادلة (3) نحصل
 على $y = 2 \times 1 - 2 = 2 - 2 = 0$
 ومنه حل النظمة $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$ هو الزوج
 (1;0)

لنحل النظمة $\begin{cases} 2x-y=2 & (1) \\ x+y=1 & (2) \end{cases}$
 . نكتب y بدلالة x في المعادلة (1)
 لدينا $2x - y = 2$
 تكافئ $y = 2x - 2$ (3)
 . نعوض y بتعبيره في المعادلة (2) نحصل
 على : $x + 2x - 2 = 1$
 تكافئ $3x - 2 = 1$
 تكافئ $3x - 2 + 2 = 1 + 2$

ب . طريقة التآلفية الخطية

تعريف 3

من إحدى المعادلتين نكتب أحد المجهولين بدلالة الآخر ثم نعوضه بتعبيره في المعادلة الأخرى .

مثال : حل النظام التالية

$$\begin{cases} 2x-3y=2 & (1) \\ 3x+y=-5 & (2) \end{cases}$$

الحل

يكافئ $x = -\frac{13}{11}$

نعوض x بقيمته في المعادلة (2) نحصل على

$$3 \times \left(-\frac{13}{11}\right) + y = -5$$

تكافئ $-\frac{39}{11} + y = -5$

تكافئ $-\frac{39}{11} + y + \frac{39}{11} = -5 + \frac{39}{11}$

يكافئ $y = \frac{-55 + 39}{11} = -\frac{16}{11}$

ومنه حل النظام هو الزوج $\left(-\frac{13}{11}; -\frac{16}{11}\right)$

لنحل النظام

$$\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 3x+y=-5 \end{cases}$$

لدينا

$$\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 3x+y=-5 \end{cases}$$

تكافئ $3 \times (3x+y) = 3 \times (-5)$

تكافئ $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 9x+3y=-15 \end{cases}$

نجمع المعادلتين طرف بطرف نحصل على

$$2x - 3y + 9x + 3y = 2 + (-15)$$

يكافئ $2x + 9x = -13$

يكافئ $11x = -13$

يكافئ $\frac{1}{11} \times 11x = \frac{1}{11} \times (-13)$

2 - الحل الهندسي

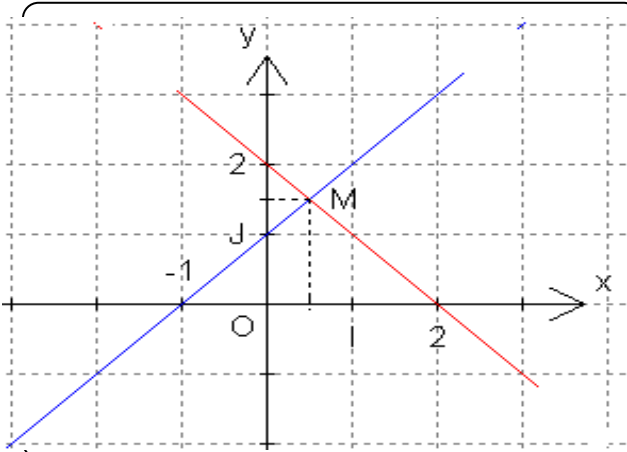
تعريف 4

لحل النظام $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ مبيانيا ندرس وضعية المستقيمين المعرفين بالمعادلتين :

$ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$

مثال : حل مبيانيا النظام التالية

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$$



نعتبر المستقيمين المعرفين كمايلي : الشكل جانبه

$(D): x - y = -1$ و $(\Delta): 2x + y = 2$

في معلم متعامد ممنظم $(O; I; J)$ ننشئ

المستقيمين (D) و (Δ) . مبيانيا تقاطع

المستقيمين (D) و (Δ) هو النقطة

$M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ ومنه الزوج $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ هو حل

النظام $\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

نعتبر المستقيمين (D) و (Δ) المعرفين بالمعادلتين $y = mx + p$ و $y = m'x + p'$.
 إذا كان $(D) // (Δ)$ فإن النظام $\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$ لا تقبل حلا .
 إذا كان $(D) = (Δ)$ فإن النظام $\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$ تقبل ما لا نهاية من الحلول .
 إذا كان $(D) \cap (Δ) = \{A\}$ فإن النظام $\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$ تقبل حلا و حيدا هو $(x_A; y_A)$.

III. مسائل تؤول في حلها إلى أنظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

مثال :

يقترح مسرح صنفين من المقاعد : أحدها بـ 40 درهما و الآخر بـ 70 درهما . علما أن 200 مشاهد حضروا عرضا و أن المدخول لهذا العرض بلغ 10400 درهم . حدد عدد المقاعد التي بيعت من كل صنف

الحل

1. اختيار المجاهيل

ليكن x عدد المقاعد المقترحة بـ 40 درهما و ليكن y عدد المقاعد المقترحة بـ 70 درهما

2. وضع المسألة في صيغة رياضية

يمكن تفصيل معطيات المسألة كمايلي :

عدد مقاعد صنف 40Dh + عدد مقاعد صنف 70Dh = 200

التمن الإجمالي لمقاعد صنف 40Dh + الثمن الإجمالي لمقاعد صنف 70Dh = المدخول الإجمالي

بتعبير آخر : $x + y = 200$ و $40x + 70y = 10400$

3. حل المسألة

$$\begin{cases} x + y = 200 & (1) \\ 40x + 70y = 10400 & (2) \end{cases}$$

سنستعمل طريقة التعويض لحل النظام:

نكتب x بدلالة y في المعادلة 1 نحصل على $x = 200 - y$

نعوض y بتعبيره في المعادلة 2 نحصل على $40(200 - y) + 70y = 10400$

تكافئ $40 \times 200 - 40y + 70y = 10400$

يكافئ $8000 + 30y = 10400$

يكافئ $8000 + 30y + (-8000) = 10400 + (-8000)$ يكافئ $30y = 2400$

يكافئ $y = 80$ يكافئ $\frac{1}{30} \times 30y = \frac{1}{30} \times 2400$

نعوض y بقيمته في المعادلة 1 نحصل على $x = 200 - 80 = 120$

ومنه عدد مقاعد صنف 40Dh هو 120 و عدد مقاعد صنف 70Dh هو 80

4. الرجوع إلى المسألة

$$120 + 80 = 200 \quad \text{و} \quad 40 \times 120 + 70 \times 80 = 4800 + 5600 = 10400$$