معـــــــــادلة مستقيم

نشاط تمهيدي

نعتبر الدالة التآلفية المعرفة كما يلي : $f(x) = 2x - 1$ و (D) تمثيلها في معلم متعامد ممنظم (O,I,J)

1 – هل النقط $A(0;-1)$ و $B(-1;-3)$ تنتمي إلى (D).

2– أنشئ التمثيل المبياني (D) للدالة f في المعلم (O,I,J) .

3 – لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستقيم (D) حيث M تخالف A و B .

أ – بين أن $\dfrac{y - y_A}{x - x_A} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

ب– استنتج أن $y = 2x - 1$.

I. المعادلة المختصرة لمستقيم

تعريف1

ليكن (O,I,J) معلما متعامدا ممنظما .

المعادلة المختصرة لمستقيم (D) لا يوازي محور الأراتيب تكتب على شكل $y = mx + p$

العدد m يسمى المعامل الموجه أو ميل المستقيم (D).

العدد p يسمى الأرتوب عند الأصل.

1 ـ إنشاء مستقيم معرف بمعادلته المختصرة .

نعتبر المستقيم (D) المعرف بالمعادلة $y = 3x + 1$ لإنشاء المستقيم (D) في معلم متعامد ممنظم (O,I,J) يكفي تحديد نقطتين مختلفتين منه.

نأخذ $x = 0$ نحصل على $y = 1$

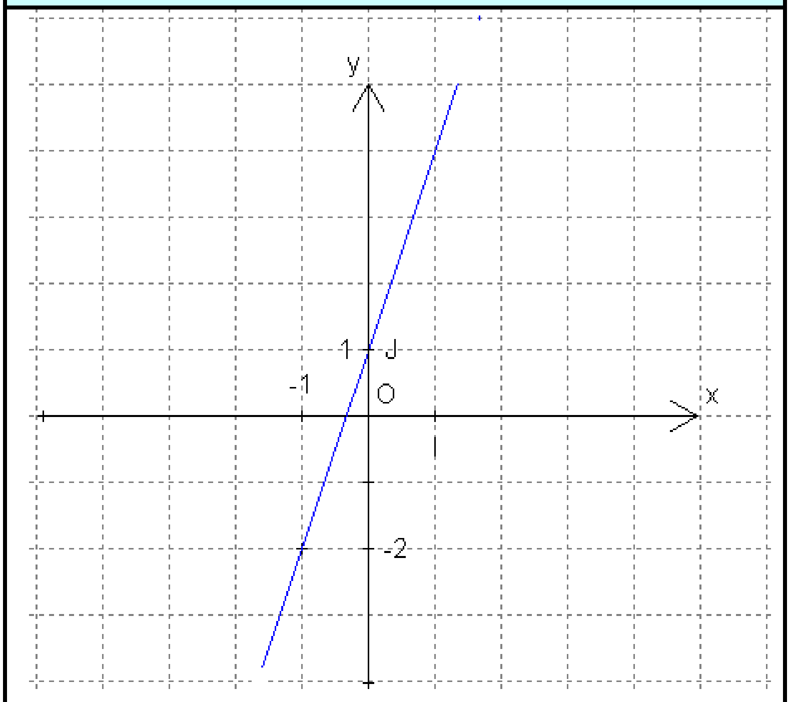
نأخذ $x = -1$ نحصل على $y = -2$

x	0	-1
y	1	-2

النقطتين $M(0,1)$ و $N(-1,-2)$

(D)

$(D)\ :\ y = 3x + 1$



ملاحظة

(D) مستقيم معرف بالمعادلة $y = mx + p$ و $A(x_A; y_A)$ نقطة من المستوى.

$A \in (D)$ يعني $y_A = mx_A + p$

تطبيق 1

نعتبر المستقيم (D) المعرف بالمعادلة $y = 3x - 8$.

1 – هل النقطة $A(2,0)$ تنتمي إلى المستقيم (D).

2 – علما أن النقطة $M(2a, a)$ تنتمي إلى المستقيم (D)، حدد العدد الحقيقي a .

الحل

1 – هل النقطة $A(2,0)$ تنتمي إلى المستقيم (D).

لدينا $3x_A - 8 = 3 \times 2 - 8 = 6 - 8 = -2$

بما أن $y_A = 0$ فإن $y_A \neq 3x_A - 8$

ومنه النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (D)

. لنحدد قيمة العدد الحقيقي a

لدينا $M(2a; a) \in (D)$

يكافئ $y_M = 3x_M - 8$

يكافئ $a = 3 \times 2a - 8$

يكافئ $a = 6a - 8$

يكافئ $8 = 6a - a$

يكافئ $5a = 8$

يكافئ $a = \frac{8}{5}$

2 ـ تحديد المعادلة المختصرة لمستقيم يمر من نقطتين مختلفتين .

خاصية 1

إذا كانت $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ نقطتين مختلفتين من المستقيم الذي معادلته $y = mx + p$

فإن $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ مع $x_B \neq x_A$.

تطبيق 2

حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (D) المار من النقطتين $A(0; -1)$ و $B(3; 5)$

. لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (D)

نعلم أن المعادلة المختصرة للمستقيم (D)

تكتب على شكل $y = mx + p$

1 – لنحدد المعامل الموجه m

نعلم أن $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

(لأن $A \in (D)$ و $B \in (D)$)

ت . ع $m = \frac{5 - (-1)}{3 - 0} = \frac{6}{3} = 2$

2 – لنحدد الأرتوب عند الأصل p

لدينا $A \in (D)$

يكافئ $y_A = mx_A + p$

ت . ع $-1 = 2 \times 0 + p$

يكافئ $p = -1$

ومنه المعادلة المختصرة للمستقيم (D) هي

$y = 2x - 1$

II. تعامد و توازي مستقيمين

1 ـ شرط توازي مستقيمين.

خاصية 2

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين بحيث $(D)\ :\ y = mx + p$ و $(\Delta)\ : y = m'x + p'$

$(D)//(\Delta)$ إذا وفقط إذا كان $m = m'$

تطبيق 3

1- ليكن (D) و (Δ) مستقيمين بحيث $(D) : y = (\beta + 1)x + 3$ و $(\Delta) : y = (2\beta + 4)x + 15$

علما أن $(D)//(\Delta)$. بين أن $\beta = -3$

(D) $A(1,-2)$ (D')

الحل

1 . لنحدد العدد الحقيقي β

لدينا $(D)//(\Delta)$

يكافئ للمستقيمين (D) و (Δ) نفس الميل

يكافئ $\beta + 1 = 2\beta + 4$

يكافئ $2\beta - \beta = 1 - 4$

يكافئ $\beta = -3$

2 – المعادلة المختصرة للمستقيم (D')

نعلم أن المعادلة المختصرة للمستقيم (D')

تكتب على شكل $y = mx + p$

. تحديد المعامل m

لدينا $(D)//(\Delta)$

إذن $m = \beta + 1 = -3 + 1 = -2$

. تحديد الأرتوب عند الأصل p

لدينا $A \in (D')$ يكافئ $y_A = mx_A + p$

تطبيق عددي $-2 = -2 \times 1 + p$

يكافئ $-2 = -2 + p$

يكافئ $p = 2 - 2 = 0$

ومنه المعادلة المختصرة ل (D') هي $y = -2x$

2 ـ شرط تعامد مستقيمين.

خاصية 3

ليكن (O, I, J) معلما متعامدا ممنظما . (D) و (Δ) مستقيمان بحيث :

$(D)\ :\ y = mx + p$ و $(\Delta)\ : y = m'x + p'$

$(D) \perp (\Delta)$ إذا وفقط إذا كان $m \times m' = -1$

تطبيق 4

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, I, J)، (D) المستقيم المعرف بالمعادلة :

$y = -4x + 3$.

1 – حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) المار من النقطة $A(0;-1)$ و العمودي على المستقيم (D).

2 – نعتبر المستقيم (D') المعرف بالمعادلة $x - 4y - 1 = 0$ ، بين أن $(D') \perp (D)$

الحل

1– نعلم أن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) تكتب على شكل $y = mx + p$

– لنحدد المعامل الموجه m

لدينا $(\Delta) \perp (D)$ بحيث $(D) : y = -4x + 3$

يكافئ $4 \times m = -1$

يكافئ $m = -\frac{1}{4}$

– لنحدد الأرتوب عند الأصل p

لدينا $A \in (\Delta)$

يكافئ $y_A = mx_A + p$

ت . ع $-1 = -\frac{1}{4} \times 0 + p$

$p = -1$

ومنه المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي:

$y = -\frac{1}{4}x - 1$

2 – لنبين أن $(D') \perp (D)$

لدينا المستقيم (D') المعرف بالمعادلة:

$x - 4y - 1 = 0$

المعادلة تكافئ $-4y = -x + 1$

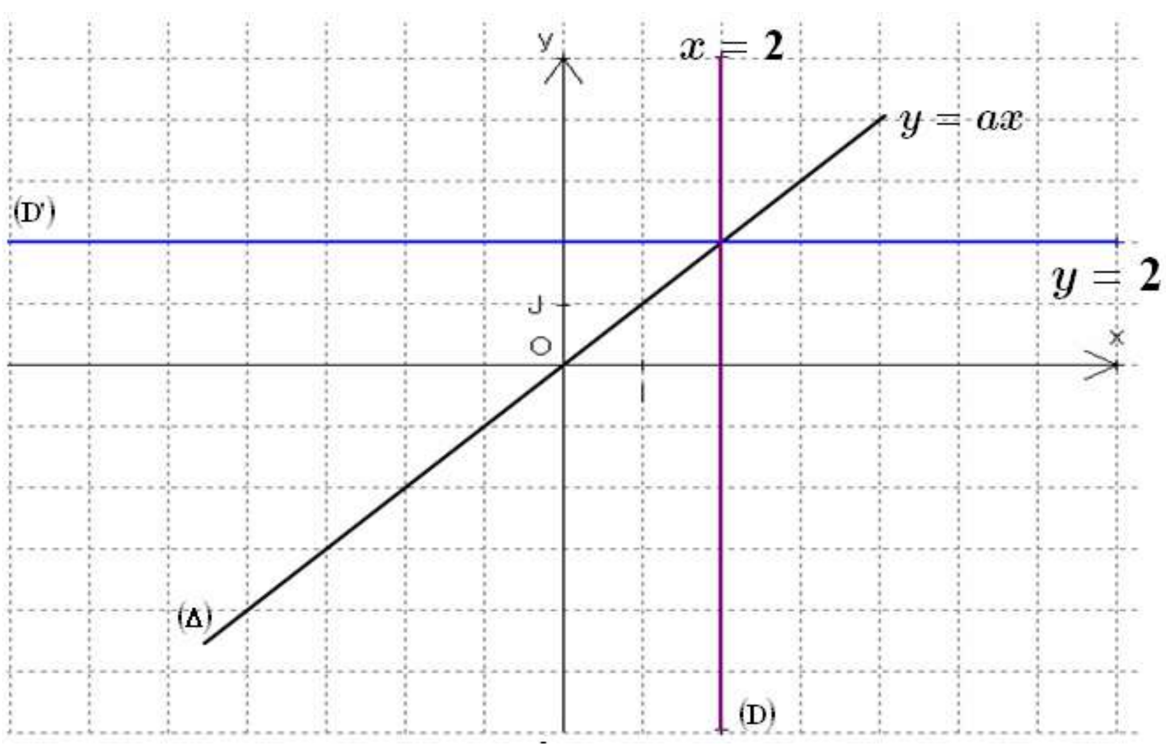
تكافئ $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

ومنه ميل المستقيم (D') هو $\frac{1}{4}$.

و بما أن $\frac{1}{4} \times (-4) = -1$

فإن $(D') \perp (D)$

III. حـــالات خـــاصـــة .



- معادلة محور الأفاصيل هي : $y = 0$
- معادلة محور الأراتيب هي : $x = 0$
- معادلة المستقيم (Δ) المار من أصل المعلم تكتب على شكل $y = ax$
- معادلة المستقيم الموازي لمحور الأفاصيل و المار من النقطة $M(a;b)$ هي $y = b$
- معادلة المستقيم الموازي لمحور الأراتيب و المار من النقطة $M(a;b)$ هي $x = a$