Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

الدرس ③ : المعلم في المستوى

I - إحداثيتا نقطة :

1) المعلم في المستوى :

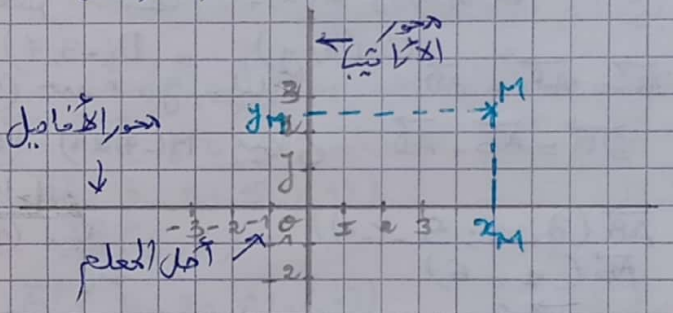
* مثال :

O و I و J ثلاث نقط من المستوى بحيث $(OI) \perp (OJ)$ و $OI = OJ = 1$

* المعلم (O, I, J) يسمى معلما متعامدا منظما.

نقول أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد منظم.

* النقطة O تسمى أصل المعلم
* المستقيم (OI) يسمى محور الأفاصيل.
* المستقيم (OJ) يسمى محور الأراتيب.



2) إحداثيتا نقطة :

أ - تعريف :

كل نقطة M من المستوى مرتبطة بزوج (x_M, y_M) يسمى زوج إحداثيتي النقطة M.

x_M يسمى أفصول M و y_M يسمى أرتوب M

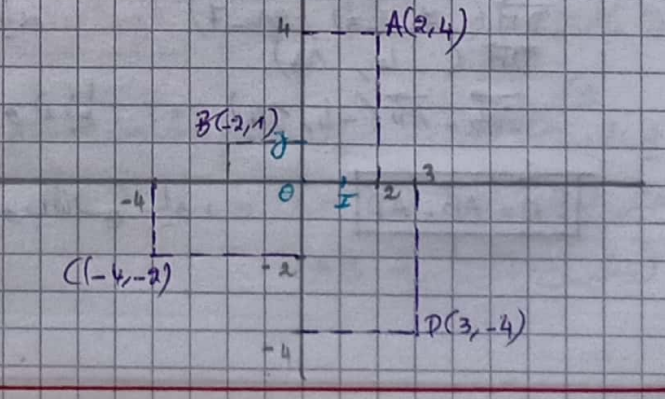
ونكتب $M(x_M, y_M)$

ب - مثال :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد منظم.

لتمثل النقط الآتية : $A(2,3)$ و $B(-2,1)$

$C(-4,-2)$ و $D(3,-4)$



ج - ملاحظات هامة :

* معلم متعامد منظم إذن : $O(0,0)$ و $I(1,0)$ و $J(0,1)$
* إذا كانت M تنتمي لمحور الأفاصيل فإن : $M(x_M, 0)$ ونكتب $y_M = 0$
* إذا كانت M تنتمي لمحور الأراتيب فإن : $M(0, y_M)$ ونكتب $x_M = 0$

3) إحداثيتا منتصف قطعة :

أ - تعريف :

نعتبر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$

إذا كانت M منتصف القطعة $[AB]$ فإن

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad ; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

ونكتب : $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

ب - مثال :

نعتبر $A(2,3)$ و $B(-2,1)$

لتحدد إحداثيتي E منتصف القطعة $[AB]$

لدينا : $x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0$

$y_E = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

إذن : $\boxed{E(0,2)}$

ج - تمرين تطبيقي

نعتبر في مستوى منسوب إلى معلم متعامد منظم النقط التالية :

$A(-2,1)$ و $B(2,2)$ و $C(3,-2)$ و $D(x,y)$

1) حدد إحداثيتي E منتصف القطعة $[AC]$

2) حدد x و y علما أن E منتصف القطعة $[BD]$

الحل :

1) $E\left(\frac{3+(-2)}{2}, \frac{-2+1}{2}\right)$ إذن : $[AC]$ منتصف E

ومنه : $E\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

2) $E\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$ إذن : $[BD]$ منتصف E

$\frac{x+2}{2} = \frac{1}{2}$ ومنه $x = -1$ ، $\frac{y+2}{2} = \frac{-1}{2}$ أي أن $y = -3$

$\boxed{D(-1,-3)}$

Talamid.ma للمزيد من الملفات تم بزيارة الموقع
Réalisé par : M. BENMASSER Jamal

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

II - أحداثيتا متجهة :

1) أحداثيتا متجهة :

أ - تعريف :

في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{I},\vec{J})$ نعتبر $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ النقطتين

أحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هما x_B-x_A و y_B-y_A

ونكتب : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$

ب - مثال :

نعتبر النقطتين $A(5,-4)$ و $B(-3,4)$

لحساب أحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-3-5,4-(-4))$

إذن $\overrightarrow{AB}(-8,8)$

2) مساواة متجهتين :

أ - خاصية ① :

في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{I},\vec{J})$ نعتبر المتجهتين $\overrightarrow{AB}(a,b)$ و $\overrightarrow{CD}(x,y)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ يعني $a=x$ و $b=y$

أي تكون متجهتان متساويتان إذا كانت لهما نفس الأحداثيات.

ب - مثال :

نعتبر النقط $A(3,3)$ و $B(1,-4)$ و $C(-2,-2)$

لتحدد أحداثيتي النقطة D لكي يكون $ABCD$ متوازي أضلاع

$ABCD$ متوازي أضلاع يعني $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

يعني $\begin{cases} x_B-x_A=x_C-x_D \\ y_B-y_A=y_C-y_D \end{cases}$

يعني $\begin{cases} 1-3=-2-x_D \\ -4-3=-2-y_D \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} x_D=-2+2=0 \\ y_D=-2+7=5 \end{cases}$

وبالتالي : $D(0,5)$

3) أحداثيتا مجموع متجهتين :

أ - خاصية ② :

نعتبر المتجهتين $\overrightarrow{AB}(a,b)$ و $\overrightarrow{CD}(x,y)$

لدينا : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(a+x,b+y) \\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}(a-x,b-y) \end{cases}$

ب - أمثلة :

نعتبر المتجهتين $\overrightarrow{AB}(3,-1)$ و $\overrightarrow{CD}(2,-4)$

* لدينا : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(3+2,-1+(-4))$

إذن $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(5;-5)$

* ولدينا : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}(3-2;-1-(-4))$

إذن $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}(1,3)$

ج - تعريف تطبيقي :

نعتبر النقطتين $B(3;5)$ و $A(2;-1)$ و $D(-3;7)$ و $C(x;y)$

(1) حدد x و y علما أن : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

(2) بين أن : $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ حيث $M(-7,21)$

الحل :

(1) لدينا : $\overrightarrow{AB}(3-2;5-(-1))$

إذن $\overrightarrow{AB}(1,6)$

و $\overrightarrow{AD}(-3-2;7-(-1))$

$\overrightarrow{AD}(-5,8)$

و $\overrightarrow{AC}(x-2,y+1)$

ولدينا : ~~$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$~~

ولدينا : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}(1+(-5),6+8)$

إذن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}(-4,14)$

بما أن : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ يعني : $\begin{cases} x-2=-4 \\ y+1=14 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} x=-4+2=-2 \\ y=14-1=13 \end{cases}$

$C(-2;13)$: ومنه

(2) $D(-3,7)$ و $M(-7,21)$

إذن : $\overrightarrow{DM}(-7-(-3),21-7)$

$\overrightarrow{DM}(-4,14)$

ولدينا : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}(-4,14)$

وبالتالي : $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

Talamid.ma للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع
Réalisé par : Mr BENMASSER Jamal

هذا الملف تم تحميله من موقع: Talamid.ma

4) إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

أ- خاصية ③:

نعتبر المنتجهة $\vec{AB}(a;b)$ و k عدد حقيقي

لدينا: $k\vec{AB}(ka;kb)$

ب- مثال:

نعتبر المنتجهة $\vec{AB}(3;-1)$

لدينا: $2\vec{AB}(2\times3;2\times(-1))$

إذن: $2\vec{AB}(6;-2)$

ولدينا: $-4\vec{AB}(-4\times3;-4\times(-1))$

إذن: $-4\vec{AB}(-12;4)$

ج- تمرين تطبيقي:

نعتبر النقط $A(2;-1)$ و $B(3;5)$ و $C(4;11)$

بين أن النقط A و B و C مستقيمية

الحل: من أجل ذلك نبين أن المنتجهتان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مستقيميتان أي أن: $\vec{AC}=k\vec{AB}$

لدينا: $\vec{AB}(3-2;5-(-1))$

إذن: $\vec{AB}(1;6)$

ولدينا: $\vec{AC}(4-2;11-(-1))$

إذن: $\vec{AC}(2;12)$

لدينا: $2\vec{AB}(2;12)$

إذن: $\vec{AC}=2\vec{AB}$

وبالتالي فإن النقط A و B و C مستقيمية.

III- المسافة بين نقطتين:

1) خاصية ④:

في معلم متعامد ممنظم إذا كانت: $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$

فإن: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

* ملاحظة هامة:

إذا كانت $\vec{AB}(x;y)$ فإن: $AB=\sqrt{x^2+y^2}$

2) مثال:

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر النقطتين $A(-2;3)$ و $B(-5;7)$

لنحسب المسافة AB

* الطريقة ①:

لدينا: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$=\sqrt{(-5-(-2))^2+(7-3)^2}=\sqrt{(-3)^2+4^2}$

$=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

وبالتالي $AB=5$

* الطريقة ②: في حالة حساب إحداثيات $\vec{AB}$

لدينا: $\vec{AB}(-5-(-2);7-3)$

$\vec{AB}(-3;4)$

إذن: $AB=\sqrt{(-3)^2+4^2}$

$=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}$

وبالتالي فإن: $AB=5$

3) تمرين تطبيقي:

في معلم متعامد ممنظم نعتبر النقط:

$A(1;5)$ و $B(3;9)$ و $C(11;5)$ و $D(9;1)$

بين أن الرباعي $ABCD$ مستطيل.

الحل:

لدينا: $\vec{AB}(3-1;9-5)$

$\vec{AB}(2;4)$

و $\vec{DC}(11-9;5-1)$

$\vec{DC}(2;4)$

إذن: $\vec{AB}=\vec{DC}$ أي أن $ABCD$ متوازي أضلاع

* ولدينا نبين أن المثلث ABC قائم الزاوية في B

لدينا: $\vec{BC}(11-3;5-9)$

$\vec{BC}(8;-4)$

و $\vec{AC}(11-1;5-5)$

$\vec{AC}(10;0)$

لدينا: $AB=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$BC=\sqrt{8^2+(-4)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}$

$AC=\sqrt{10^2+0^2}=\sqrt{100}=10$

لدينا: $AC^2=AB^2+BC^2$

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في B

وبالتالي فإن: $ABCD$ مستطيل.

للمزيد من الملفات تم بزيارة الموقع: Talamid.ma