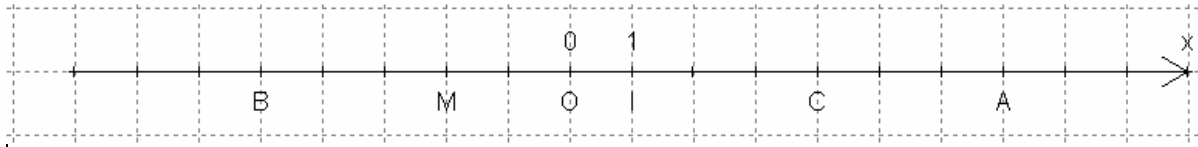


## المعلم في المستوى

نشاط تمهيدي

نعتبر الشكل الآتي بحيث  $D(O, I)$  مستقيم مدرج .



1. حدد أفصول النقط  $A$  و  $C$  و  $M$  و  $B$  .

2. أحسب المسافات  $OI$  و  $OC$  و  $OA$  .

3. أحسب المسافات  $IC$  و  $CA$  .

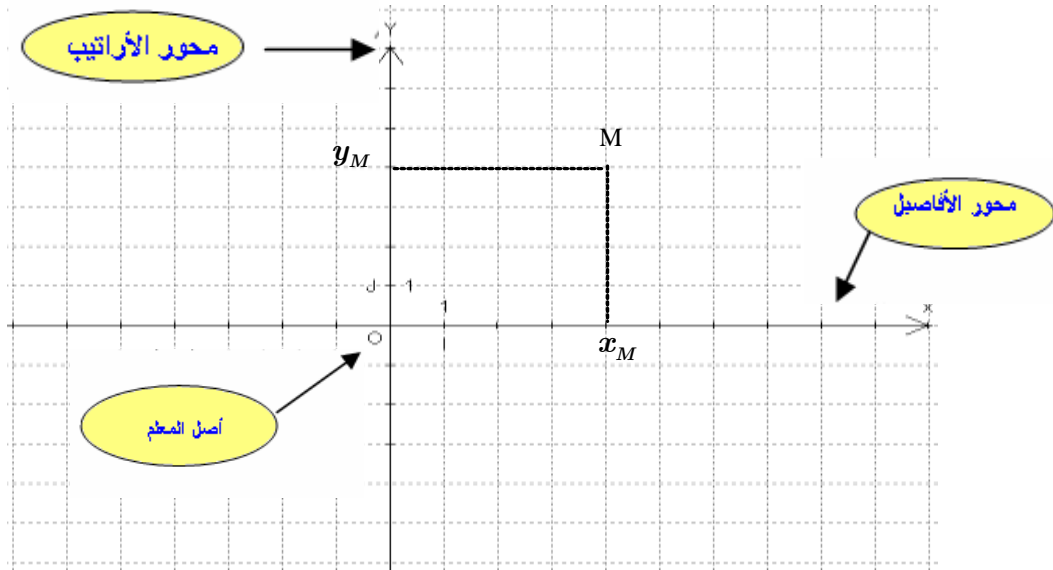
4. أستنتج أن  $C$  منتصف القطعة  $[IA]$  .

5. تحقق أن  $x_C = \frac{x_A + x_I}{2}$  .

### I. المعلم في المستوى - إحداثيتي نقطة

تعريف 1

نعتبر الشكل أسفله بحيث  $D(O, I)$  و  $\Delta(O, J)$  مستقيمين مدرجين متعامدين في النقطة  $O$



مصطلحات

. المثلوث  $(O, I, J)$  يسمى معلما متعامدا للمستوى .

. النقطة  $O$  تسمى أصل المعلم المتعامد  $(O, I, J)$  .

. المستقيم المدرج  $D(O, I)$  يسمى محور الأفاصيل .

. المستقيم المدرج  $\Delta(O, J)$  يسمى محور الأرتاب .

. الزوج  $(x_M, y_M)$  يسمى زوج إحداثيتي النقطة  $M$  ونكتب  $M(x_M, y_M)$  أو  $M\left(\begin{smallmatrix} x_M \\ y_M \end{smallmatrix}\right)$

. العدد الحقيقي  $x_M$  يسمى أفصول النقطة  $M$  والعدد الحقيقي  $y_M$  يسمى أرتوب النقطة  $M$  .

### حالة خاصة

إذا كان في المعلم المتعامد  $(O, I, J)$  ،  $OI = OJ = 1$  فإن  $(O, I, J)$  يسمى معلم متعامد ممنظم .

### تطبيق 1

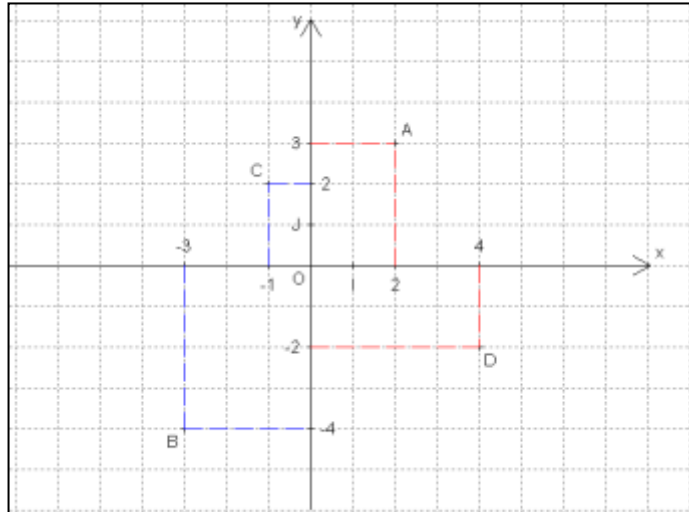
مثل في معلم متعامد  $(O, I, J)$  النقط  $A(2, 3)$  و  $B(-3, -4)$  و  $C(-1, 2)$  و  $D(4, -2)$

### ملاحظة

- . جميع النقط التي تنتمي إلى محور الأفاصيل أراتبها تساوي 0 .
- . جميع النقط التي تنتمي إلى محور الأراتيب أفاصلها تساوي 0 .

### تطبيق 2

حدد قيمة العدد  $y$  علما أن النقطة  $M(2, 2y + 1)$  تنتمي إلى محور



### حل التطبيق 2

. لنحدد قيمة العدد الحقيقي  $y$  .

لدينا  $M(2, 2y + 1) \in (OI)$

يعني  $y_M = 0$  يعني  $2y + 1 = 0$  يعني  $2y + 1 + (-1) = 0 + (-1)$

يعني  $2y = -1$  يعني  $\frac{1}{2} \times 2y = \frac{1}{2} \times (-1)$  يعني  $y = -\frac{1}{2}$

## II. إحداثيتي متجهة .

### خاصية 1

$(O, I, J)$  معلم متعامد للمستوى .

إذا كانت  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  نقطتين من المستوى فإن إحداثيتي المتجهة  $\overrightarrow{AB}$  هما  $x_B - x_A$  و  $y_B - y_A$  . نكتب  $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$  .

### تطبيق 3

. لنحدد إحداثيتي المتجهة  $\overrightarrow{AB}$  .

نعلم أن  $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

ت.ع  $\overrightarrow{AB}(-3 - 2, -4 - 3)$

ومنه  $\overrightarrow{AB}(-5, -7)$

حدد إحداثيتي المتجهة  $\overrightarrow{AB}$  علما أن

$A(2, 3)$  و  $B(-3, -4)$  .

### III. تساوي متجهتين

خاصية 2

(O, I, J) معلم متعامد للمستوى.

$$\begin{cases} x_B - x_A = x_F - x_E \\ y_B - y_A = y_F - y_E \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$$

الحل

تطبيق 4

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \text{لدينا}$$

$$\text{تعني } y_B - y_A = y_C - y_D \text{ و } x_B - x_A = x_C - x_D$$

$$\text{ت.ع } -5 - 3 = 0 - (y - 2) \text{ و } 4 - x = 1 - 2$$

$$\text{تكافئ } -8 = -y + 2 \text{ و } 4 - x = -1$$

$$\text{تكافئ } y = 8 + 2 = 10 \text{ و } x = 1 + 4 = 5$$

في معلم متعامد (O, I, J) نعتبر النقط :

$$A(x - 1; 3) \text{ و } B(4; -5) \text{ و } C(1; 0) \text{ و } D(2; y - 2)$$

علما أن  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  حدد قيمتي  $x$  و  $y$ .

إصطلاح : نقبل أن كيفما كان الزوج (A, B) توجد متجهة  $\vec{u}$  من المستوى المتجهي حيث  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ .

### IV. إحداثيتي مجموع متجهتين

خاصية 3

(O, I, J) معلم متعامد للمستوى .

$$\vec{u}(a; b) \text{ و } \vec{v}(x; y) \quad \text{فإن} \quad \vec{u} + \vec{v}(a + x; b + y)$$

تطبيق 5

في معلم متعامد (O, I, J) نعتبر النقط  $A(2; -1)$  و  $B(3; 5)$  و  $D(-3; 7)$  و  $C(x; y)$

$$1 - \text{ حدد العددين } x \text{ و } y \text{ علما أن } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$2 - \text{ بين أن } \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ حيث } M(-7, 21)$$

الحل

$$2 - \text{ لبين أن } \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{DM} = (x_M - x_D)\overrightarrow{OI} + (y_M - y_D)\overrightarrow{OJ}$$

$$\text{تطبيق عددي } \overrightarrow{DM} = (-7 + 3)\overrightarrow{OI} + (21 - 7)\overrightarrow{OJ}$$

$$\text{يكافئ } \overrightarrow{DM} = -4\overrightarrow{OI} + 14\overrightarrow{OJ}$$

$$\text{ومنه } \overrightarrow{DM}(-4, 14)$$

من جهة أخرى حسب السؤال 1 لدينا

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -4\overrightarrow{OI} + 14\overrightarrow{OJ}$$

$$\text{و منه } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}(-4, 14)$$

$$\text{وبالتالي } \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

1- لحدد قيم العددين الحقيقيين  $x$  و  $y$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\text{إذن } y_{AC} = y_{AB} + y_{AD} \text{ و } x_{AC} = x_{AB} + x_{AD}$$

$$\text{يعني } x_C - x_A = x_B - x_A + x_D - x_A$$

$$\text{و } y_C - y_A = y_B - y_A + y_D - y_A$$

$$\text{ت.ع } x - 2 = 3 - 2 + (-3) - 2$$

$$\text{و } y - (-1) = 5 - (-1) + 7 - (-1)$$

$$\text{يعني } y + 1 = 14 \text{ و } x - 2 = -4$$

$$\text{يعني } y = 14 - 1 \text{ و } x = -4 + 2$$

$$\text{يعني } y = 13 \text{ و } x = -2$$

## V. إحداثيتي منتصف قطعة .

### خاصية 4

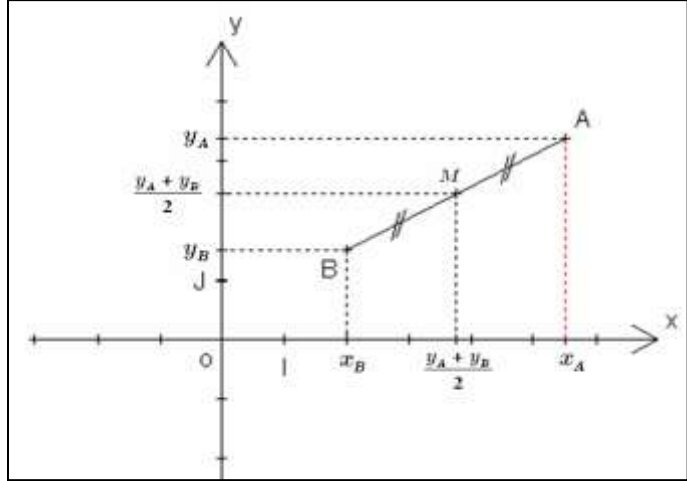
إذا كانت  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  نقطتين من المستوى.

فإن إحداثيتي منتصف القطعة  $[AB]$  هما  $\frac{x_A + x_B}{2}$  و  $\frac{y_A + y_B}{2}$ .

أفصول منتصف قطعة هو نصف مجموع أرتوبي طرفيها و أرتوب منتصف قطعة هو نصف مجموع أرتوبي طرفيها.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$



### تطبيق 6

في معلم متعامد  $(O, I, J)$  نعتبر النقطتين  $A(2; -1)$  و  $B(3; 5)$ .

1- حدد إحداثيتي منتصف  $[AB]$ .

2- حدد إحداثيتي النقطة  $N$  حيث  $A$  منتصف القطعة  $[NB]$ .

### الحل

لنحدد إحداثيتي النقطة  $N$

لدينا  $A$  منتصف  $[BN]$ .

إذن  $2x_A = x_N + x_B$  و  $2y_A = y_N + y_B$

ت.ع  $2 \times 2 = x_N + 3$  و  $2 \times (-1) = y_N + 5$

يعني  $4 = x_N + 3$  و  $-2 = y_N + 5$

يعني  $x_N = 4 - 3 = 1$  و  $y_N = -2 - 5 = -7$

. لنحدد إحداثيتي I منتصف  $[AB]$ .

لدينا I منتصف  $[AB]$ .

إذن  $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$  و  $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$

ت.ع  $x_I = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$  و  $y_I = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$

ومنه  $I\left(\frac{5}{2}; 2\right)$

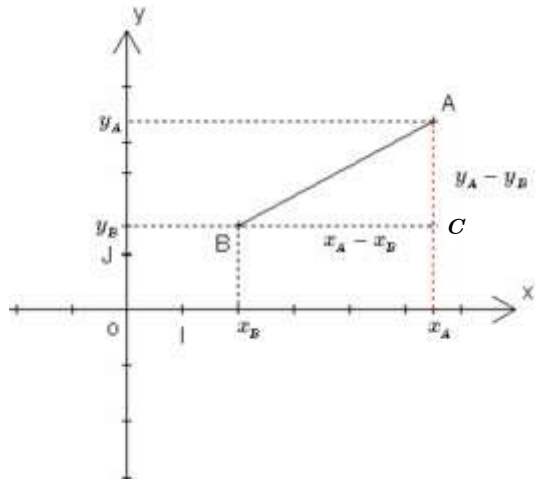
## VI. المسافة بين نقطتين في معلم متعامد ممنظم

### خاصية 5

إذا كان في معلم متعامد ممنظم  $(O, I, J)$   $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$

فإن  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

إشارة : العلاقة أعلاه خاصة بالمعلم المتعامد الممنظم (  $OI = OJ = 1$  )



لنبرهن أن  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$  في الشكل جانبه لدينا المثلث  $ABC$  قائم الزاوية في الرأس  $C$  ، حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

$$BC^2 + AC^2 = AB^2 \text{ أي}$$

$$(x_A - x_B)^2 (OI)^2 + (y_A - y_B)^2 (OI)^2 = AB^2$$

بما أن  $OI = OJ = 1$  فإن

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = AB^2$$

$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = AB \quad \text{ا. ا. ا.}$$

تطبيق 7

في معلم متعامد ممنظم  $(O, I, J)$  نعتبر النقطتين  $A(2; -1)$  و  $B(3; 5)$  و  $C(x, 5)$

1 - أ حسب  $AB$  .

2 - حدد قيم  $x$  من أجل  $AC^2 = AB^2$  .

الحل

1 - لنحسب  $AB$  .

لدينا  $(O, I, J)$  معلم متعامد ممنظم للمستوى

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ إذن}$$

$$AB = \sqrt{(3 - 2)^2 + (5 - (-1))^2} \text{ ت. ع}$$

$$AB = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{1 + 36} \text{ تكافئ}$$

$$AB = \sqrt{36} \text{ ومنه}$$

2 - لنحدد قيم  $x$  من أجل  $AC^2 = AB^2$

لدينا  $AC^2 = AB^2$

$$\left( \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \right)^2 = (\sqrt{37})^2 \text{ يكافئ}$$

$$(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = 37 \text{ يكافئ}$$

$$(x - 2)^2 + (5 + 1)^2 = 37 \text{ يكافئ}$$

$$(x - 2)^2 + (6)^2 = 37 \text{ يكافئ}$$

ملاحظة

في معلم متعامد ممنظم إذا كان  $\overrightarrow{MN}(a; b)$  فإن  $MN = \sqrt{a^2 + b^2}$