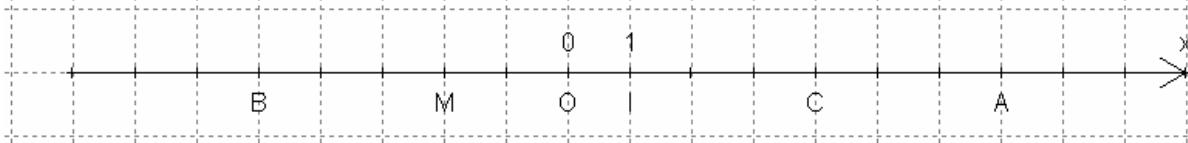


المعلم في المستوى

نشاط تمهيدي

نعتبر الشكل الآتي بحيث $D(O,I)$ مستقيم مدرج .



1. حدد أقصى النقاط A و M و C و B .

2. أحسب المسافات OA و OC و OI .

3. أحسب المسافات CA و IC و CB .

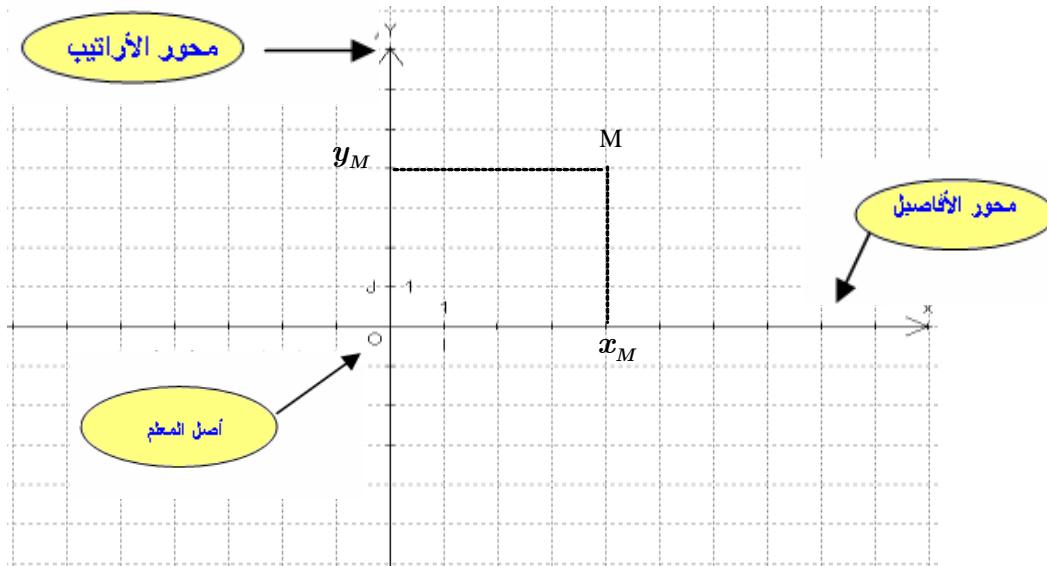
4. أستنتج أن C منتصف القطعة $[IA]$.

$$5. \text{تحقق أن } x_C = \frac{x_A + x_I}{2}$$

I. المعلم في المستوى - إحداثي نقطة

تعريف 1

نعتبر الشكل أسفله بحيث $D(O,I)$ و $\Delta(O,J)$ مستقيمين مدرجين متوازيين في النقطة O



مطالعات

- . المثلث (O,I,J) يسمى **معلماً متوازياً** للمستوى .
- . النقطة O تسمى **أصل المعلم المتوازى** (O,I,J) .
- . المستقيم المدرج $D(O,I)$ يسمى **محور الأراتيب** .
- . المستقيم المدرج $D(O,J)$ يسمى **محور الأفاصيل** .
- . الزوج (x_M, y_M) يسمى زوج إحداثي النقطة M و نكتب $M(x_M, y_M)$ أو $M(x_M)$.
- . العدد الحقيقي x_M يسمى **أقصى النقطة M** والعدد الحقيقي y_M يسمى **أرتب النقطة M** .

حالة خاصة

إذا كان في المعلم المتعامد (O, I, J) فإن $OI = OJ = 1$ ، يسمى معلم متعامد منتظم .

تطبيق 1

مثل في معلم متعامد (O, I, J) النقط $A(2,3)$ و $B(-3,-4)$ و $C(-1,2)$ و $D(4,-2)$

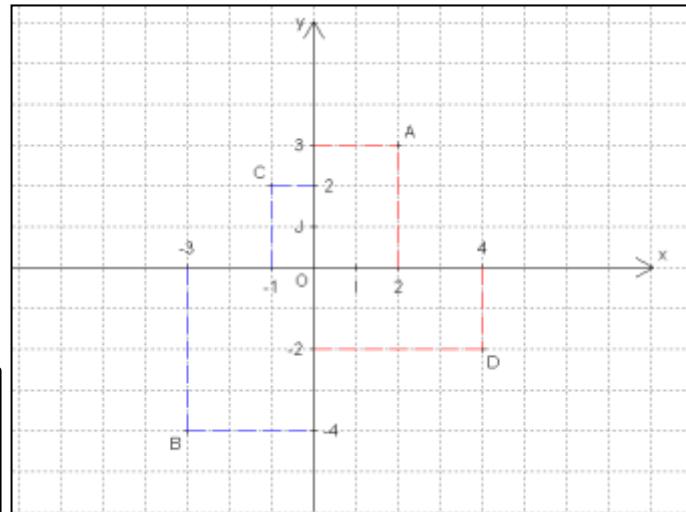
ملاحظة

الحل

- جميع النقط التي تنتمي إلى محور الأفاصيل أراتبها تساوي 0 .
- جميع النقط التي تنتمي إلى محور الأراتيب أفالصلها تساوي 0 .

تطبيق 2

حدد قيمة العدد y علما أن النقطة $M(2, 2y + 1)$ تنتمي إلى محور



حل التطبيق 2

نحدد قيمة العدد الحقيقي y .

$M(2, 2y + 1) \in (OI)$ لدينا

$$2y + 1 + (-1) = 0 + (-1) \quad \text{يعني} \quad 2y + 1 = 0 \quad \text{يعني} \quad y_M = 0 \quad \text{يعني}$$

$$y = -\frac{1}{2} \quad \text{يعني} \quad \frac{1}{2} \times 2y = \frac{1}{2} \times (-1) \quad \text{يعني} \quad 2y = -1 \quad \text{يعني}$$

II. إحداثي متوجهة .

خاصية 1

إذا كانت $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ نقطتين من المستوى فإن إحداثيي المتوجهة \overrightarrow{AB} هما $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$. و نكتب $x_B - x_A$ و $y_B - y_A$

تطبيق 3

نحدد إحداثيي المتوجهة \overrightarrow{AB} .

نعلم أن $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

ت.ع $\overrightarrow{AB}(-3 - 2, -4 - 3)$

ومنه $\overrightarrow{AB}(-5, -7)$

حدد إحداثيي المتوجهة \overrightarrow{AB} علما أن $B(-3, -4)$ و $A(2, 3)$

III. تساوي متجهتين

خاصية 2

معلم متعامد للمستوى.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_B - x_A = x_F - x_E \\ y_B - y_A = y_F - y_E \end{array} \right. \quad \text{يعني} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$$

الحل

تطبيق 4

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ لدينا
 $y_B - y_A = y_C - y_D$ و $x_B - x_A = x_C - x_D$ تعني
 $-5 - 3 = 0 - (y - 2)$ و $4 - x = 1 - 2$ ت.ع
 $-8 = -y + 2$ و $4 - x = -1$ تكافى
 $y = 8 + 2 = 10$ و $x = 1 + 4 = 5$ تكافى

في معلم متعامد (O, I, J) نعتبر النقط :
 $C(1; 0)$ و $B(4; -5)$ و $A(x - 1; 3)$
 $D(2; y - 2)$.
 علما أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ حدد قيمتي x و y .

اصطلاح : نقبل أن كيما كان الزوج (A, B) توجد متجهة \bar{u} من المستوى المتجهي حيث

IV. إحداثي مجموع متجهتين

خاصية 3

معلم متعامد للمستوى .

$$\bar{u} + \bar{v}(a + x; b + y) \quad \text{إذ كان} \quad \bar{v}(x; y) \quad \text{و} \quad \bar{u}(a; b)$$

تطبيق 5

في معلم متعامد (O, I, J) نعتبر النقط $C(x; y)$ و $D(-3; 7)$ و $B(3; 5)$ و $A(2; -1)$.
 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ - حدد العددين x و y علما أن $M(-7, 21)$ بين أن -2

الحل

2 - لبين أن $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
 $\overrightarrow{DM} = (x_M - x_D)\overrightarrow{OI} + (y_M - y_D)\overrightarrow{OJ}$ لدينا
 $\overrightarrow{DM} = (-7 + 3)\overrightarrow{OI} + (21 - 7)\overrightarrow{OJ}$ تطبيق عددي
 $\overrightarrow{DM} = -4\overrightarrow{OI} + 14\overrightarrow{OJ}$ يكفى

و منه $\overrightarrow{DM}(-4, 14)$
 من جهة أخرى حسب السؤال 1 لدينا
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -4\overrightarrow{OI} + 14\overrightarrow{OJ}$
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}(-4, 14)$ و منه
 $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ وبالتالي

1 - لنحدد قيم العددين الحقيقيين x و y
 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ لدينا
 $y_{AC} = y_{AB} + y_{AD}$ و $x_{AC} = x_{AB} + x_{AD}$ إذن
 $x_C - x_A = x_B - x_A + x_D - x_A$ يعني
 $y_C - y_A = y_B - y_A + y_D - y_A$ و
 $x - 2 = 3 - 2 + (-3) - 2$ ت.ع
 $y - (-1) = 5 - (-1) + 7 - (-1)$ و
 $y + 1 = 14$ و $x - 2 = -4$ يعني
 $y = 14 - 1$ و $x = -4 + 2$ يعني
 $y = 13$ و $x = -2$ يعني

٧. إحداثي منتصف قطعة .

خاصية 4

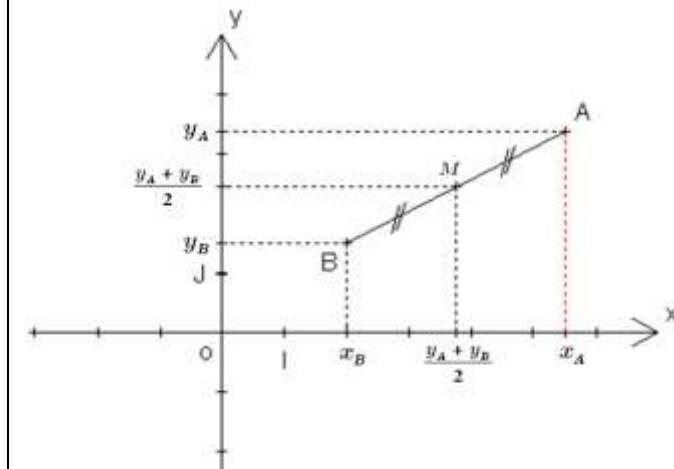
إذا كانت $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ نقطتين من المستوى.

فإن إحداثي منتصف القطعة $[AB]$ هما $\frac{x_A + x_B}{2}$ و $\frac{y_A + y_B}{2}$

أقصول مننصف قطعة هو نصف مجموع أرتويي طرفيها و أرتوب مننصف قطعة هو نصف مجموع أرتويي طرفيها.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$



تطبيق 6

في معلم متعامد (O, I, J) نعتبر النقطتين $A(2; -1)$ و $B(3; 5)$.

١- حدد إحداثي I مننصف $[AB]$.

٢- حدد إحداثي النقطة N حيث A مننصف القطعة $[NB]$.

الحل

لتحديد إحداثي النقطة N
لدينا A مننصف $[BN]$
 $2y_A = y_N + y_B$ و $2x_A = x_N + x_B$ إذن
 $2 \times 5 = y_N - 1$ و $2 \times 2 = x_N + 3$ ت.ع
 $10 = y_N - 1$ يعني $4 = x_N + 3$
 $y_N = 10 + 1 = 11$ يعني $x_N = 4 - 3 = 1$

لتحديد إحداثي I مننصف $[AB]$
لدينا I مننصف $[AB]$
 $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$ و $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ إذن
 $y_I = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$ و $x_I = \frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2}$ ت.ع
 $I\left(\frac{5}{2}; 2\right)$ ومنه

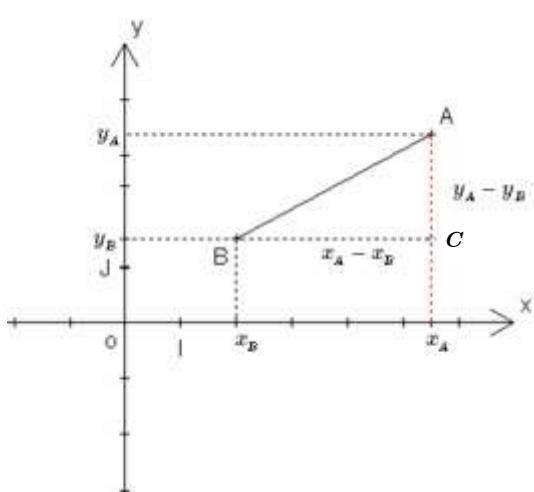
VI. المسافة بين نقطتين في معلم متعامد ممنظم

خاصية 5

إذا كان في معلم متعامد ممنظم (O, I, J) و $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

العلاقة أعلاه خاصة بالمعلم المتعامد الممنظم ($OI = OJ = 1$) إشارة :



لبرهن أن في الشكل جانبه لدينا المثلث ABC قائم الزاوية في الرأس C ، حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$$\begin{aligned} BC^2 + AC^2 &= AB^2 \\ (x_A - x_B)^2 (OI)^2 + (y_A - y_B)^2 (OI)^2 &= AB^2 \\ \text{بما أن } OI = OJ = 1 & \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 &= AB^2 \\ \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} &= AB \end{aligned}$$

تطبيق 7

- في معلم متعمد ممنظم (O,I,J) نعتبر النقاطين $A(-1,2)$ و $B(3,5)$ و $C(x,5)$.
- 1 - حسب AB .
 - 2 - حدد قيم x من أجل $AC^2 = AB^2$

الحل

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + 36 &= 37 && \text{يكافئ} \\ (x-2)^2 + 36 + (-36) &= 37 + (-36) && \text{يكافئ} \\ (x-2)^2 &= 1 && \text{يكافئ} \\ (x-2)^2 - 1 &= 0 && \text{يكافئ} \\ (x-2+1)(x-2-1) &= 0 && \text{يكافئ} \\ (x-1)(x-3) &= 0 && \text{يكافئ} \\ x-3 = 0 \quad \text{أو} \quad x-1 = 0 & && \text{يكافئ} \\ x-3+3 = 0+3 \quad \text{أو} \quad x-1+1 = 0+1 & && \text{يكافئ} \\ x = 3 \quad \text{أو} \quad x = 1 & && \text{يكافئ} \\ : x = 1 \quad \text{حالة} & && \text{في} \\ AC^2 = (1-2)^2 + (5+1)^2 &= 1+36 = 37 && \text{في حالة} \\ x = 3 & && \text{في حالة} \\ AC^2 = (3-2)^2 + (5+1)^2 &= 1+36 = 37 && \text{في حالة} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \text{لنحسب } AB . & \\ \text{لدينا } (O,I,J) \text{ معلم متعمد ممنظم للمستوى} & \\ AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} & \quad \text{إذن} \\ AB = \sqrt{(3-2)^2 + (5-(-1))^2} & \quad \text{ت.ع} \\ AB = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{1+36} & \quad \text{تكافي} \\ AB = \sqrt{36} & \quad \text{ومنه} \\ 2 - \text{لحدد قيم } x \text{ من أجل } AC^2 = AB^2 & \\ AC^2 = AB^2 & \quad \text{لدينا} \\ \left(\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \right)^2 &= (\sqrt{37})^2 \\ (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 &= 37 \\ (x-2)^2 + (5+1)^2 &= 37 \\ (x-2)^2 + (6)^2 &= 37 \end{aligned}$$

ملاحظة

$MN = \sqrt{a^2 + b^2}$ فإن $\overrightarrow{MN}(a; b)$ في معلم متعمد ممنظم إذا كان