



موقع الرياضيات بالثانوي الإعدادي
www.anissmaths.net

حلّول التمرّين

مبارهنّة فيثاغورس + الحساب المثلثي
المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي
من إعداد الأستاذ : المهدي عنيّس

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية

والتكوين المهني



الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة الدار البيضاء الكبرى
نيابة المحمدية

تمرين ① :

(1) - حساب : AH .

لدينا : H إسقط العمودي للنقطة A على (BC) .
إذن : AHC مثلث قائم الزاوية في H .
و حسب مبرهن فيثاغورس إلباشرة فإن :
 $AC^2 = AH^2 + HC^2$
أي : $\sqrt{7}^2 = AH^2 + 2^2$
و منه فإن :

$$\begin{aligned} AH^2 &= \sqrt{7}^2 - 2^2 \\ &= 7 - 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

و بما أن : $AH > 0$ فإن : $AH = \sqrt{3} \text{ cm}$.

(2) - حساب : BH .

لدينا : H إسقط العمودي للنقطة A على (BC) .
إذن إمثلث AHB قائم الزاوية في H .
و حسب مبرهن فيثاغورس إلباشرة فإن :
 $AB^2 = HA^2 + BH^2$
أي : $(3\sqrt{2})^2 = \sqrt{3}^2 + BH^2$
و منه فإن :

$$\begin{aligned} BH^2 &= (3\sqrt{2})^2 - \sqrt{3}^2 \\ &= 18 - 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

و بما أن : $BH > 0$ فإن : $BH = \sqrt{15}$.

تمرين ② :

لنثبت أن إمثلث ABC قائم الزاوية.

(أ) -- لنحسب : AB .

لدينا من خلال الشكل : ABH مثلث قائم الزاوية في H .
إذن حسب مبرهن فيثاغورس إلباشرة فإن : $AB^2 = HA^2 + HB^2$.
أي :
 $AB^2 = 4^2 + 2^2$
 $= 16 + 4$
 $= 20$

و بما أن : $AB > 0$ فإن : $AB = \sqrt{20}$ ، أي : $AB = 2\sqrt{5} \text{ cm}$.

(ب) -- لنحسب : AC .

لدينا من خلال الشكل : ACH مثلث قائم الزاوية في H .
إذن حسب مبرهن فيثاغورس إلباشرة فإن : $AC^2 = HA^2 + HC^2$.
أي :
 $AC^2 = 4^2 + 8^2$
 $= 16 + 64$
 $= 80$

و بما أن : $AC > 0$ فإن : $AC = \sqrt{80}$ ، أي : $AC = 4\sqrt{5} \text{ cm}$.

(ج) -- لنثبت أن : ABC مثلث قائم الزاوية .

$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = 20 \\ AC^2 = 80 \\ BC^2 = 100 \end{array} \right\} \text{ لدينا : } \text{و} \quad \text{إذن : } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

وحسب مبرهنة فيثاغورس مباشرة فإن ABC مثلث قائم الزاوية في A .

تمرين ③ :

لنثبت أن : $AB^2 + AC^2 = DB^2 + DC^2$.

*/ لدينا من خلال الشكل ABC مثلث قائم الزاوية في A .

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس مباشرة فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ① .

*/ لدينا من خلال الشكل DBC مثلث قائم الزاوية في D .

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس مباشرة فإن : $BC^2 = DB^2 + DC^2$ ② .

و من ① و ② نستنتج أن : $AB^2 + AC^2 = DB^2 + DC^2$.

تمرين ④ :

(1) -- لنثبت أن ABC مثلث قائم الزاوية .

$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = 6^2 = 36 \\ AC^2 = 8^2 = 64 \\ BC^2 = 10^2 = 100 \end{array} \right\} \text{ لدينا : } \text{و} \quad \text{إذن : } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

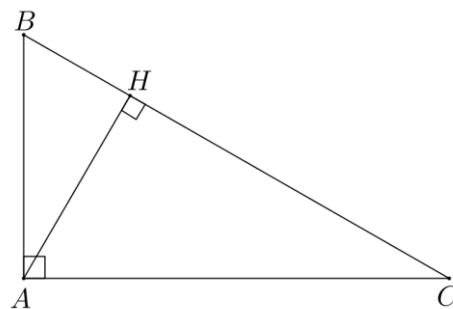
وحسب مبرهنة فيثاغورس مباشرة فإن ABC مثلث قائم الزاوية في A .

(2) -- لنحسب النسب المثلثية للزاوية $\hat{A}BC$:

*/ لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في A .

$$\left. \begin{array}{l} \cos \hat{A}BC = \frac{3}{5} \\ \sin \hat{A}BC = \frac{4}{5} \\ \tan \hat{A}BC = \frac{4}{3} \end{array} \right\} \text{ إذن : } \text{و} \quad \left. \begin{array}{l} \cos \hat{A}BC = \frac{6}{10} \\ \sin \hat{A}BC = \frac{8}{10} \\ \tan \hat{A}BC = \frac{8}{6} \end{array} \right\} \text{ أي : } \text{و} \quad \left. \begin{array}{l} \cos \hat{A}BC = \frac{AB}{BC} \\ \sin \hat{A}BC = \frac{AC}{BC} \\ \tan \hat{A}BC = \frac{AC}{AB} \end{array} \right\} \text{ إذن : } \text{و}$$

(3) -- الشكل :



(4) - / * لنحسب : AH .

بما أن H إسقاط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) ، فإن ABH مثلث قائم الزاوية في H .

$$\sin \hat{ABH} = \frac{AH}{AB} \quad , \quad \sin \hat{ABH} = \frac{AH}{6} \quad : \text{أي} \quad \sin \hat{ABH} = \frac{AH}{6}$$

و بما أن $\hat{ABH} = \hat{ABC}$ (نفس الزاوية) ، فإن $\sin \hat{ABH} = \sin \hat{ABC}$:

$$\frac{AH}{6} = \frac{4}{5} \quad : \text{يعني أن} \quad AH = \frac{6 \times 4}{5}$$

$$AH = \frac{24}{5} \text{ cm} \quad : \text{و بالتالي فإن}$$

/ * لنحسب : CH .

بما أن H إسقاط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) ، فإن ACH مثلث قائم الزاوية في H .

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \quad : \text{أي} \quad 8^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 + CH^2$$

و منه فإن :

$$CH^2 = 8^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2 = 64 - \frac{576}{25} = \frac{1600 - 576}{25} = \frac{1024}{25}$$

$$CH > 0 \quad : \text{فإن} \quad CH = \sqrt{\frac{1024}{25}} \quad , \quad \text{و بالتالي فإن} \quad CH = \frac{32}{5} \text{ cm}$$

تمرين ⑤ :

(1) - لنبسط ما يلي :

$$\begin{aligned} C &= \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha - \cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha \\ &= (\cos^2 \alpha)^2 - (\sin^2 \alpha)^2 - \cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha \\ &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha \\ &= 1 \times (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha \\ &= 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \sin \alpha \times \sqrt{1 - \cos \alpha} \times \sqrt{1 + \cos \alpha} + \cos^2 \alpha \\ &= \sin \alpha \times \sqrt{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} + \cos^2 \alpha \\ &= \sin \alpha \times \sqrt{1^2 - \cos^2 \alpha} + \cos^2 \alpha \\ &= \sin \alpha \times \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} + \cos^2 \alpha \\ &= \sin \alpha \times \sqrt{\sin^2 \alpha} + \cos^2 \alpha \\ &= \sin \alpha \times \sin \alpha + \cos^2 \alpha \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) - \sin \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha) \\ &= \cos \alpha \times \sin \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \times \cos \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= \cos \alpha \times \sin \alpha - \cos \alpha \times \sin \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 - \sin \alpha} - \frac{2}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{(1 - \sin \alpha) + (1 + \sin \alpha)}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} - \frac{2}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{1 - \sin \alpha + 1 + \sin \alpha}{1^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{2}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{2}{1 - \sin^2 \alpha} - \frac{2}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{2}{\cos^2 \alpha} - \frac{2}{\cos^2 \alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\sqrt{1-\sin \alpha} \times \sqrt{1+\cos \alpha} = \cos \alpha : \text{لنبين أن}^*$$

لدينا :

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\sin \alpha} \times \sqrt{1+\sin \alpha} &= \sqrt{(1-\sin \alpha)(1+\sin \alpha)} \\ &= \sqrt{1^2 - \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{\cos^2 \alpha} \\ &= \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\boxed{\sqrt{1-\sin \alpha} \times \sqrt{1+\cos \alpha} = \cos \alpha} : \text{إذن}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2}{1 + \tan^2} : \text{لنبين أن}^*$$

لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} &= \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \times \frac{\cos^2 \alpha}{1} \\ &= \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2}{1 + \tan^2}} : \text{إذن}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} : \text{لنبين أن}^*$$

لدينا :

$$\begin{aligned}1 + \tan^2 \alpha &= 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}\end{aligned}$$

$$\boxed{1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}} : \text{إذن}$$

$$\begin{aligned}E &= (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 \\ &= \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \times \sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \times \sin \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \\ &= 2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= 2 \times 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F &= \sqrt{2} \times \sin^2 \alpha + 2 \sin 45^\circ \times \cos^2 \alpha \\ &= \sqrt{2} \times \sin^2 \alpha + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos^2 \alpha \\ &= \sqrt{2} \times \sin^2 \alpha + \sqrt{2} \times \cos^2 \alpha \\ &= \sqrt{2} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= \sqrt{2} \times 1 \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = 1 : \text{لنبين أن}^* - (2)$$

لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} &= \frac{(\cos^2 \alpha)^2 - (\sin^2 \alpha)^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{1 \times (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} : \text{لنبين أن}^*$$

$$\left. \begin{aligned}(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) &= 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha \times \sin \alpha &= \sin^2 \alpha\end{aligned} \right\} 9 : \text{لدينا}$$

$$(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = \sin \alpha \times \sin \alpha : \text{إذن}$$

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} : \text{و بالتالي فإن}$$

/* حساب $\tan \alpha$:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{نعلم أن}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} \quad \text{و منه فإن} \quad \tan \alpha = \sqrt{3} \quad \text{و بالتالي} \quad \boxed{\tan \alpha = \sqrt{3}}$$

(ب) -- /* حساب :

$$\sin(90^\circ - \alpha) \quad \text{و} \quad \cos(90^\circ - \alpha) \quad \text{و} \quad \tan(90^\circ - \alpha)$$

$$(90^\circ - \alpha) + \alpha = 90^\circ + \alpha - \alpha = 90^\circ \quad \text{لدينا}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{إذن}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(3) -- /* حساب $\cos \alpha$:

$$\text{لدينا} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{يعني أن}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{4-3}{4}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{4}} \quad \text{و بما أن} \quad 0 < \cos \alpha < 1 \quad \text{فإن}$$

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{1}{2}} \quad \text{أي}$$

تمرين ⑥ :

لنحسب : AB .

/* لدينا من خلال الشكل :

ABC مثلث قائم الزاوية في A و ABE مثلث قائم الزاوية في A .

$$\left. \begin{array}{l} \tan \hat{ACB} = \frac{AB}{AC} \\ \tan \hat{AEB} = \frac{AB}{AE} \end{array} \right\} \quad \text{و إذن}$$

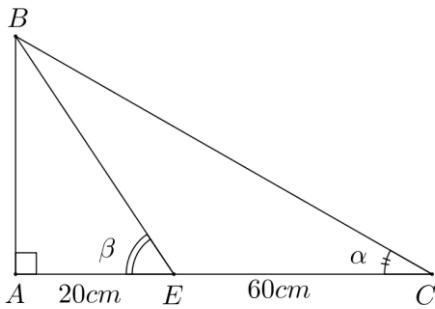
$$\left. \begin{array}{l} \tan \alpha = \frac{AB}{80} \\ \tan \beta = \frac{AB}{20} \end{array} \right\} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta} \quad \text{و بما أن} \quad \alpha + \beta = 90^\circ \quad \text{فإن}$$

$$\frac{AB}{80} = \frac{1}{\frac{AB}{20}} \quad \text{أي}$$

$$AB^2 = 1600 \quad \text{و منه فإن} \quad \frac{AB}{80} = \frac{20}{AB} \quad \text{يعني أن}$$

$$\text{و بما أن} \quad AB > 0 \quad \text{فإن} \quad AB = \sqrt{1600} \quad \text{و بالتالي فإن} \quad \boxed{AB = 40 \text{ cm}}$$



تمرين ⑦ :

(1) - / حساب : $\cos \hat{A}BC$.

لدينا : $\cos^2 \hat{A}BC + \sin^2 \hat{A}BC = 1$ ، يعني أن $\cos^2 \hat{A}BC = 1 - \sin^2 \hat{A}BC$

$$\cos^2 \hat{A}BC = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad \text{أي :}$$

$$\cos \hat{A}BC = \sqrt{\frac{16}{25}} \quad \text{فإن : } 0 < \cos \hat{A}BC < 1 \quad \text{و بما أن : } \cos \hat{A}BC = \frac{4}{5} \quad \text{و بالتالي فإن :}$$

/ حساب : $\tan \hat{A}BC$.

$$\tan \hat{A}BC = \frac{\sin \hat{A}BC}{\cos \hat{A}BC} \quad \text{أي :} \quad \tan \hat{A}BC = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{إذن :} \quad \tan \hat{A}BC = \frac{3}{4}$$

(2) - حساب : AB و AC .

لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في A .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{5} = \frac{AB}{15} \\ \frac{3}{5} = \frac{AC}{BC} \end{array} \right\} \text{أي :} \quad , \quad \left. \begin{array}{l} \cos \hat{A}BC = \frac{AB}{BC} \\ \sin \hat{A}BC = \frac{AC}{BC} \end{array} \right\} \text{إذن :}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = 12 \text{ cm} \\ AC = 9 \text{ cm} \end{array} \right\} \text{و بالتالي فإن :} \quad , \quad \left. \begin{array}{l} AB = \frac{60}{5} \\ AC = \frac{45}{5} \end{array} \right\} \text{يعني أن :}$$

تمرين ⑧ :

(1) - لنحسب : $A = 2 \cos 15^\circ + \cos^2 36^\circ - 2 \sin 75^\circ + \cos^2 54^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} \cos 15^\circ = \sin 75^\circ \\ \cos 36^\circ = \cos 54^\circ \end{array} \right\} \text{إذن :} \quad , \quad \left. \begin{array}{l} 15^\circ + 75^\circ = 90^\circ \\ 36^\circ + 54^\circ = 90^\circ \end{array} \right\} \text{لدينا :}$$

و منه فإن :

$$\begin{aligned} A &= 2 \cos 15^\circ + \cos^2 36^\circ - 2 \sin 75^\circ + \cos^2 54^\circ \\ &= 2 \sin 75^\circ + \sin^2 54^\circ - 2 \sin 75^\circ + \cos^2 54^\circ \\ &= 2 \sin 75^\circ - 2 \sin 75^\circ + \sin^2 54^\circ + \cos^2 54^\circ \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(2) - لنحسب : $B = \cos^2 28^\circ - \sin^2 51^\circ + \cos^2 62^\circ + \cos^2 39^\circ$

لدينا : $\left. \begin{array}{l} \cos 28^\circ = \sin 62^\circ \\ \sin 51^\circ = \cos 39^\circ \end{array} \right\}$ إذن ، $\left. \begin{array}{l} 28^\circ + 62^\circ = 90^\circ \\ 51^\circ + 39^\circ = 90^\circ \end{array} \right\}$ و

منه فإن :

$$\begin{aligned} B &= \cos^2 28^\circ - \sin^2 51^\circ + \cos^2 62^\circ + \cos^2 39^\circ \\ &= \sin^2 62^\circ - \cos^2 39^\circ + \cos^2 62^\circ + \cos^2 39^\circ \\ &= \sin^2 62^\circ + \cos^2 62^\circ - \cos^2 39^\circ + \cos^2 39^\circ \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(3) - لنحسب : $C = \tan 73^\circ \times \tan 17^\circ - \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ$

لدينا : $\left. \begin{array}{l} \tan 73^\circ = \frac{1}{\tan 17^\circ} \\ \sin 40^\circ = \cos 50^\circ \end{array} \right\}$ إذن ، $\left. \begin{array}{l} 73^\circ + 17^\circ = 90^\circ \\ 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ \end{array} \right\}$ و

منه فإن :

$$\begin{aligned} C &= \tan 73^\circ \times \tan 17^\circ - \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ \\ &= \frac{1}{\tan 17^\circ} \times \tan 17^\circ - \cos^2 50^\circ - \sin^2 50^\circ \\ &= \frac{\tan 17^\circ}{\tan 17^\circ} - (\cos^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$