Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

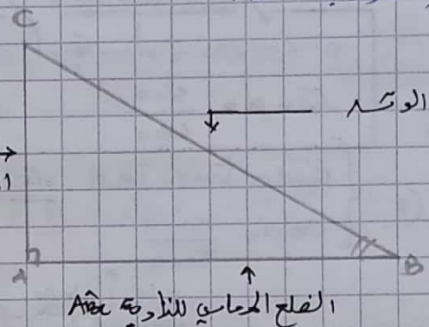
الدرس ① : الحساب المثلثي

I - النسب المثلثية لزاوية حادة :

1) تعريف :

ABC مثلث قائم الزاوية في A

نعتبر الزاوية $\widehat{ABC}$



* ملاحظات :
  * الوتر هو أكبر ضلع في المثلث القائم الزاوية
  * الزاويتان $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ACB}$ حادتان أي أن $0° < \widehat{ABC} < 90°$ و $0° < \widehat{ACB} < 90°$

2) تعريف :

في مثلث ABC قائم الزاوية في A ، النسب المثلثية للزاوية $\widehat{ABC}$ هي :

* النسبة $\frac{AB}{BC}$ تسمى جيب تمام الزاوية $\widehat{ABC}$ ونرمز لها $\cos\widehat{ABC}$ أي : تقرأ cosinus

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\text{الضلع المجاور للزاوية } \widehat{ABC}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{BC}$$

* النسبة $\frac{AC}{BC}$ تسمى جيب الزاوية $\widehat{ABC}$ ونرمز لها بالرمز $\sin\widehat{ABC}$ تقرأ sinus أي أن

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{\text{الضلع المقابل للزاوية } \widehat{ABC}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{BC}$$

* النسبة $\frac{AC}{AB}$ تسمى ظل الزاوية $\widehat{ABC}$ ونرمز لها بالرمز $\tan\widehat{ABC}$ تقرأ tangente أي أن :

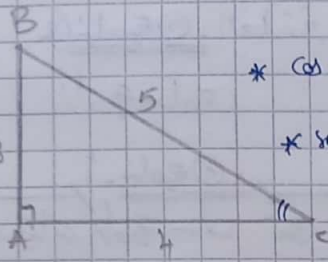
$$\tan\widehat{ABC} = \frac{\text{الضلع المقابل للزاوية } \widehat{ABC}}{\text{الضلع المجاور للزاوية } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}$$

* مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث :

$AC = 4cm$ ، $AB = 3cm$ ، $BC = 5cm$

احسب النسب المثلثية للزاوية $\widehat{ACB}$



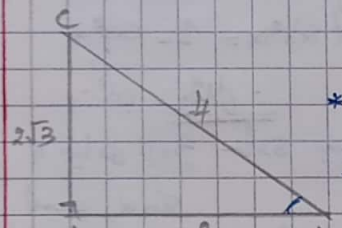
* $\cos\widehat{ACB} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8$
* $\sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$
* $\tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} = 0,75$

* تحقق تطبيقي : تحقق أن $\sin^2 21 + \cos^2 21 = 1$ و $\tan 45 = 1$

لدينا : $AB^2 = 2^2 = 4$ ، $AC^2 = (2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$ ، $BC^2 = 4^2 = 16$

إذن : $AB^2 + AC^2 = 4 + 12 = 16$ و $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ؛ أي

حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فالمثلث ABC قائم الزاوية في A



2) النسب المثلثية للزاوية $\widehat{ABC}$ ،

* $\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$
* $\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
* $\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

* النسب المثلثية للزاوية $\widehat{ACB}$

* $\cos\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
* $\sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
* $\tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3) استعمال آلة الحاسبة في الحساب المثلثي :

1) باستعمال آلة الحاسبة ، نعطي القيم المقربة للنسب المثلثية للزاوية $\alpha = 30°$

نجد : $\sin 30° = \frac{1}{2} = 0,5$ ، $\cos 30° \simeq 0,86$

$\tan 30° \simeq 0,57$

2) باستعمال آلة الحاسبة ، أوجد قياس الزاوية α التي نسبها المثلثية هي على التوالي :

$\cos\alpha_1 = 0,5$ ، $\sin\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\tan\alpha_3 = 1$

نجد : بالضغط على الشرر [Shift] + [cos / sin / tan]

$\alpha_1 = 60°$ ، $\alpha_2 = 45°$ ، $\alpha_3 = 45°$

للمزيد من الملفات تم بزيارة الموقع Talamid.ma
Réalisé par : M. BENMASSER Jamal

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

II - علاقات بين النسب المثلثية لزاوية حادة

1) خاصية ①: العلاقة بين جيب وجيب تمام زاوية حادة:

أ- خاصية ①:

α قياس زاوية حادة $0° < \alpha < 90°$

لدينا: $0 < \sin\alpha < 1$ و $0 < \cos\alpha < 1$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

* ملاحظة:

α قياس زاوية حادة $0 < \sin\alpha < 1$ و $0 < \cos\alpha < 1$ *

$\begin{cases} \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \\ \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \end{cases}$ *

ب- مثال:

α قياس زاوية حادة بحيث: $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

نحسب $\sin\alpha$

لدينا: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ، نعلم أن

إذن: $\sin^2\alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{9}$

$\sin^2\alpha = \frac{5}{9}$

إذن $\sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{9}}$ ، بما أن $\sin\alpha > 0$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

ج- تعبير حسابي طبيعي: قارئ 144 ق1

$A = 2\cos^2 x + 3\sin^2 x - 1$

$= 2\cos^2 x + 2\sin^2 x + \sin^2 x - 1$

$= 2(\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x - 1$

$= 2 + \sin^2 x - 1$

$A = 1 + \sin^2 x$

$B = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$

$= \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x$

$= \cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x \sin x - 2\cos x \sin x + \cos^2 x + \sin^2 x$

$= 1 + 1$

$B = 2$

$C = \sin^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^4 x$

$= \sin^2 x(\sin^2 x - 1) + \cos^2 x(1 - \cos^2 x)$

$= -\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x \cdot \sin^2 x$

$C = 0$

D = $\cos^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$

$= (\cos^2 x)^2 + 2\cos^2 x \sin^2 x + (\sin^2 x)^2$

$= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2$

$= 1^2$

$D = 1$

2) خاصية ②: العلاقة بين جيب وجيب تمام وظل زاوية حادة:

أ- خاصية ②:

α قياس زاوية حادة $0° < \alpha < 90°$

لدينا: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

* علاقة ①: $\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha$

علاقة ②: $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$

α قياس زاوية حادة $\tan\alpha > 0$

ب- إتمام:

نحسب α قياس زاوية حادة بحيث $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$

لدينا: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ، إذن $2\sqrt{2} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

إذن $\sin\alpha = 2\sqrt{2}\cos\alpha$

و بما أن $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$(2\sqrt{2}\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$8\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$9\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{9}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{9}}$ ، إذن $\cos\alpha > 0$

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$

لدينا $\sin\alpha = 2\sqrt{2}\cos\alpha$ ،

$\sin\alpha = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{3}$

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

ج- α قياس زاوية حادة بحيث $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

نحسب $\tan\alpha$

لدينا: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ ، إذن $\cos\alpha > 0$

لدينا $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{2}$

$\tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

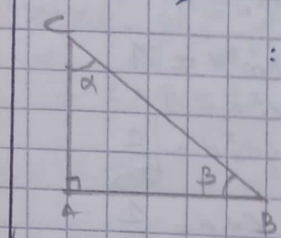
Talamid.ma للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع
Réalisé par : M. BENMASSER Jamal

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

B) خاصية ③ : النسب المثلثية لزاويتين متتامتين

أ- خاصية ③ :

إذا كانت α و β قياسي زاويتين حادتين متتامتين أي : $\alpha+\beta=90°$ فإن :



$$\begin{cases} \cos\alpha = \sin\beta \\ \sin\alpha = \cos\beta \\ \tan\alpha = \dfrac{1}{\tan\beta} \end{cases}$$

ب- أمثلة :

* $\sin 70° = \cos 20°$
* $\cos 30° = \sin 60°$
* $\sin 80° = \cos 10°$
* $\cos 45° = \sin 45°$
* $\tan 15° = \dfrac{1}{\tan 75°}$
* $\tan 11° = \dfrac{1}{\tan 79°}$

ج- تمرين تطبيقي : تحقق من أن العدد 145 ينتمي إلى المجموعة $\mathbb{N}$

$X_1 = \cos 5° + 2\sin^2 22° - \sin 85° + 2\sin^2 68°$

$= \cos 5° - \cos 5° + 2\sin^2 22° + 2\cos^2 22°$

$= 2(\sin^2 22° + \cos^2 22°)$

$= 2 \times 1$

$\boxed{X_1 = 1}$

$X_2 = \cos^2 14° + \cos^2 28° + \cos^2 76° + \cos^2 62°$

$= \cos^2 14° + \sin^2 14° + \cos^2 28° + \sin^2 28°$

$= 1 + 1$

$\boxed{X_2 = 2}$

$X_3 = 5\sin^2 34° + 3\cos^2 11° + 5\sin^2 56° + 3\cos^2 79°$

$= 5\sin^2 34° + 5\cos^2 34° + 3\cos^2 11° + 3\sin^2 11°$

$= 5(\sin^2 34° + \cos^2 34°) + 3(\cos^2 11° + \sin^2 11°)$

$= 5 + 3$

$\boxed{X_3 = 8}$

4) النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف

Talamid.ma للمزيد من الملفات تم بزيارة الموقع
Réalisé par : M. BENMASSER Jamal