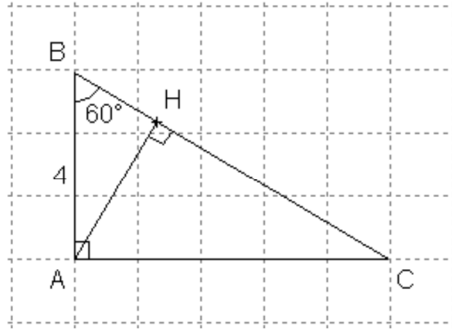


نشاط تمهيدي



نعتبر الشكل جانبه حيث $AB=4$ و $\hat{ABC}=60^\circ$

1 - أحسب HB و CB علماً أن $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

2 - أحسب AC .

3 - بين أن $AH = \frac{1}{2} AC$.

4 - إستنتج AH .

5 - تحقق أن $\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC}$.

I. جيب تمام زاوية حادة

تعريف 1

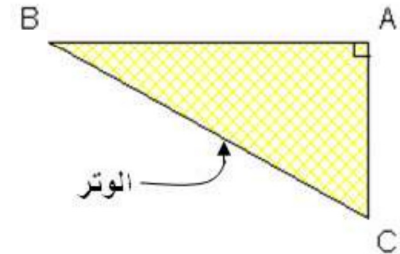
ABC مثلث قائم الزاوية في A .

جيب تمام الزاوية $\hat{ABC}$ هو خارج طول الضلع المجاور للزاوية $\hat{ABC}$ على طول الوتر ،

و نرمز له بالرمز $\cos \hat{ABC}$ ، و نكتب $\cos \hat{ABC} = \frac{AB}{BC}$.

في الشكل جانبه ABC مثلث قائم الزاوية في

A
- $[AB]$ هو الضلع المجاور للزاوية $\hat{ABC}$
- $[AC]$ هو الضلع المقابل للزاوية $\hat{ABC}$
 $\cos \hat{ABC} = \frac{AB}{BC}$



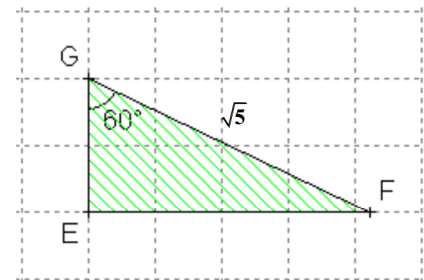
الحل

تطبيق 1

نعتبر الشكل أسفله حيث $GF = \sqrt{5}$

و $\hat{EGF} = 60^\circ$ علماً أن $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

أحسب GE و EF



لنحسب GE .

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E

إذن $\cos \hat{EGF} = \frac{GE}{GF}$

تطبيق عددي $\cos 60^\circ = \frac{GE}{\sqrt{5}}$

يعني $\frac{1}{2} = \frac{GE}{\sqrt{5}}$

يعني $GE = \frac{1 \times \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

. لنحسب EF

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E ، حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة : $EG^2 + EF^2 = FG^2$

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + EF^2 = (\sqrt{5})^2$$

تطبيق عددي

$$EF^2 = \frac{15}{4} \quad \text{يعني} \quad EF^2 = 5 - \frac{5}{4} \quad \text{يعني} \quad \frac{5}{4} + EF^2 = 5$$

$$EF = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2} \quad \text{و بما أن } EF > 0 \text{ فإن}$$

II. جيب زاوية حادة .

تعريف 2

ABC مثلث قائم الزاوية في A .

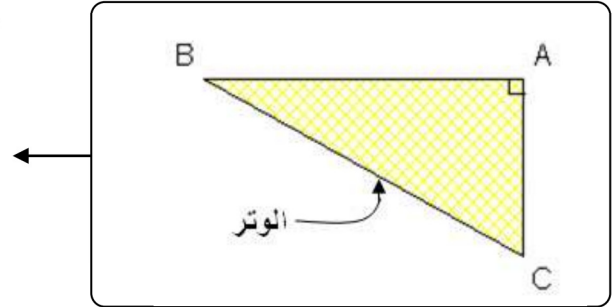
جيب الزاوية $\hat{A}BC$ هو خارج طول الضلع المقابل للزاوية $\hat{A}BC$ على طول الوتر ،

و نرمز له بالرمز $\sin \hat{A}BC$ ، و نكتب $\sin \hat{A}BC = \frac{AC}{BC}$.

في الشكل جانبه ABC مثلث قائم الزاوية في

$\hat{A}BC$ - [AB] هو الضلع المجاور للزاوية
 $\hat{A}BC$ - [AC] هو الضلع المقابل للزاوية

$$\sin \hat{A}BC = \frac{AC}{BC}$$



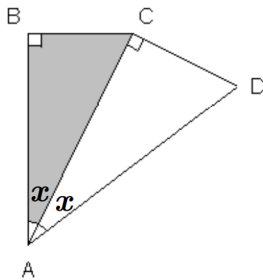
تطبيق 2

نعتبر الشكل جانبه. نضع $\hat{B}AC = \hat{C}AD = x$

1 - أكتب تعبير $\sin x$ في المثلث ABC ثم في المثلث ACD .

2 - استنتج أن $CD \times AC = AD \times BC$.

3 - إذا علمت أن $AD = 5$ و $CD = 3$ أحسب AC و BC .



الحل

1 - نعبّر $\sin x$ في المثلث ABC .

$$\sin x = \frac{BC}{AC} \quad \text{لدينا ABC قائم الزاوية في B إذن}$$

. نعبّر $\sin x$ في المثلث ACD .

$$\sin x = \frac{DC}{AD} \quad \text{لدينا ADC قائم الزاوية في C إذن}$$

2 - استنتج أن $CD \times AC = AD \times BC$.

لدينا حسب السؤال 1 $\sin x = \frac{BC}{AC}$ و $\sin x = \frac{DC}{AD}$ إذن $\frac{DC}{AD} = \frac{BC}{AC}$ يعني $DC \times AC = AD \times BC$.

3 - إذا علمت أن $AD = 5$ و $CD = 3$ أحسب AC و BC .

لنحسب AC .

نعتبر المثلث ADC القائم الزاوية في C حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة لدينا $AD^2 = AC^2 + CD^2$

ت.ع $5^2 = AC^2 + 3^2$

تكافئ $25 = AC^2 + 9$

تكافئ $AC^2 = 25 - 9 = 16$

و بمأن $AC > 0$ فإن $AC = \sqrt{16} = 4$

لنحسب BC .

لدينا حسب السؤال 2 $DC \times AC = AD \times BC$

ت.ع $3 \times 4 = 5 \times BC$

تكافئ $5BC = 12$

تكافئ $BC = \frac{12}{5}$

III. ظل زاوية حادة

تعريف 3

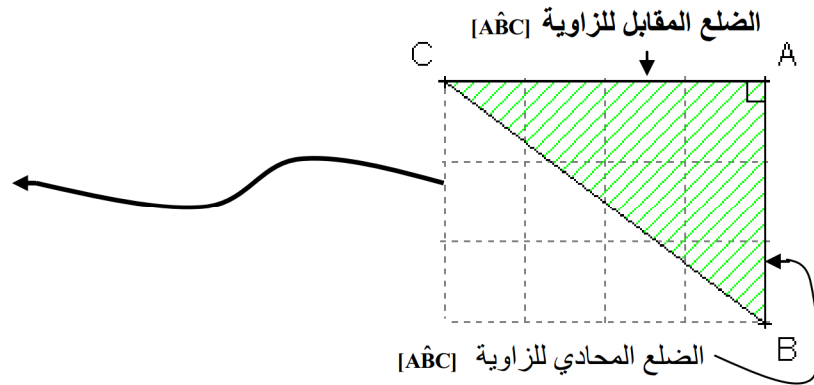
ABC مثلث قائم الزاوية في A .

ظل الزاوية $[ABC]$ هو خارج طول الضلع المقابل للزاوية $[ABC]$ على طول الضلع المجاور.

و نرمز له بالرمز $Tan \hat{A}BC$ أو $Tg \hat{A}BC$ و نكتب $Tan \hat{A}BC = \frac{AC}{AB}$

$$Tan \hat{A}BC = \frac{AC}{AB}$$

$$Tan \hat{A}CB = \frac{AB}{AC}$$



تطبيق 3

مشاهد على بعد 50m من الحائط يرى قمته بزاوية 45° .

و أسفله بزاوية 30° . (أنظر الشكل جانبه)

علما أن $\tan 45^\circ = 1$ و $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

أحسب ارتفاع هذا الحائط.

الحل

لنحسب DC . نعتبر المثلث BDC القائم الزاوية في D . لدينا $tg\hat{C}BD = \frac{DC}{BD}$ ت.ع $tg30^\circ = \frac{CD}{50}$ تكافي $CD = tg30^\circ \times 50 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 50 = 28.86$ و منه $h = 50 + 28.86 = 78.86m$	ليكن h هو إرتفاع الحائط لدينا $h = AD + DC$ لنحسب AD . نعتبر المثلث ABD القائم الزاوية في D لدينا $tg\hat{A}BD = \frac{AD}{BD}$ ت.ع $tg45^\circ = \frac{AD}{50}$ تكافي $AD = tg45^\circ \times 50 = 1 \times 50 = 50m$
--	---

IV. خاصيات

خاصية 1

ليكن α قياس زاوية حادة. لدينا $0 < \cos \alpha \leq 1$ و $0 \leq \sin \alpha < 1$
--

تطبيق 4

α قياس زاوية حادة غير منعدمة. أطر التعبير $\sqrt{3} \sin^2 \alpha - 2\sqrt{3} \cos \alpha$
--

الجواب

لنؤطر التعبير $\sqrt{3} \sin^2 \alpha - 2\sqrt{3} \cos \alpha$ بما أن α قياس زاوية حادة غير منعدمة فإن $0 < \cos \alpha < 1$ و $0 < \sin \alpha < 1$ إذن $0 \leq \sin^2 \alpha < 1^2$ و $0 < 2\sqrt{3} \cos \alpha < 2\sqrt{3}$ يعني $0 < \sqrt{3} \sin^2 \alpha < \sqrt{3}$ و $-2\sqrt{3} < -2\sqrt{3} \cos \alpha < 0$ ومنه $-2\sqrt{3} \leq \sqrt{3} \sin^2 \alpha - 2\sqrt{3} \cos \alpha \leq \sqrt{3}$
--

خاصية 2

ليكن α قياس زاوية حادة. لدينا $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
--

إستنتاج

إذا كان α قياس زاوية حادة . فإن $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ و $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

تطبيق 5

α قياس زاوية حادة . علما أن $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أحسب $\cos \alpha$.
--

الجواب

1 - لنحسب $\cos \alpha$

نعلم أن $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

يعني $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

ت.ع $\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{(\sqrt{3})^2}{2^2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

و بما أن $0 < \cos \alpha \leq 1$ فإن $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

خاصية 3

ليكن α قياس زاوية حادة غير منعدمة . لدينا $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

إستنتاج

إذا كان α قياس زاوية حادة غير منعدمة .

فإن $\sin \alpha = \cos \alpha \times \tan \alpha$ و $\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$

تطبيق 6

α قياس زاوية حادة . علما أن $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ أحسب $\cos \alpha$ و $\tan \alpha$.

لنحسب $\tan \alpha$.

نعلم أن $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

ت.ع $\tan \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ومنه $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

يمكنك البرهان على العلاقة:

$$\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$$

1 - لنحسب $\cos \alpha$

نعلم أن $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

يعني $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

ت.ع $\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1^2}{2^2}$

يعني $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

و بما أن $0 < \cos \alpha \leq 1$ فإن

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

خاصية 4

إذا كان α و β قياس زاويتين غير منعدمتين و متتامتين .

فإن $\sin \alpha = \cos \beta$ و $\cos \alpha = \sin \beta$ و $\tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}$

تطبيق 7

$$1- \text{ بسط التعبير } A = \sin^2 60^\circ + \tan 15^\circ + \sin^2 30^\circ - \frac{1}{\tan 75^\circ}$$

$$2- \text{ علما أن } \alpha + \beta = 90^\circ \text{ بين أن } \tan \beta + \frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\sin \beta \times \cos \beta} = 0$$

الجواب

$$\begin{aligned} R &= \tan \beta + \frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\sin \beta \times \cos \beta} \text{ لدينا} \\ &= \frac{\tan \beta + 1}{\tan \beta} - \frac{1}{\sin^2 \beta} \\ &= \frac{\tan \beta + 1}{\tan \beta} - \frac{\tan \beta + 1}{\tan \beta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \sin^2 60^\circ + \tan 15^\circ + \sin^2 30^\circ - \frac{1}{\tan 75^\circ} \text{ لدينا} \\ &= \sin^2 60^\circ + \sin^2 30^\circ + \tan 15^\circ - \frac{1}{\tan 75^\circ} \\ &= \sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ + \tan \frac{1}{75^\circ} - \frac{1}{\tan 75^\circ} \\ &= 1 \end{aligned}$$

النسب المثلثية لزوايا خاصة .

	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف

٧. إستعمال المحسبة لحساب النسب المثلثية

لحساب النسب المثلثية لزوايا قياسها α بالدرجة يمكن الإستعانة بالآلة الحاسبة العلمية:

مثال : لحساب النسب المثلثية للزاوية 63° نتبع الخطوات التالية :

1 - نشغل المحسبة ، و نسجل على شاشتها وحدة القياس « DEG » أو « D » أي الدرجة

2 - نسجل على الشاشة 63° .

3 - نضغط على الزر المناسب $\sin$ أو $\cos$ أو $\tan$ حسب المطلوب.

4 - نحصل على $\sin 63^\circ = 0,891006524$ أو $\cos 63^\circ = 0,453990499$ أو

$\tan 63^\circ = 1,962610505$.

ملاحظة : في بعض الآلات الحاسبة ننجز المرحلة الثالثة قبل الثانية .

. تحديد قياس زاوية أحد نسبها المثلثية معلوم

مثال : لتحديد قياس زاوية جيب تمامها يساوي $0,17364817766693$ ، نتبع الخطوات التالية :

- نشغل المحسبة ، و نسجل على شاشتها وحدة القياس « DEG » أو « D » أي الدرجة

- نسجل العدد $0,17364817766693$ و نضغط على الزر « 2ndF » ثم نضغط على $\cos$

- نحصل تقريبا على القيمة 80°