

	المملكة المغربية  وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي	
	حُلُولُ التَّمارِينِ	
	الأترتيب و الأعمال	
	المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي من إعداد الأستاذ : المهدي عنيش	

تمرين ① :

(1) - لنفان ما يلي :

$$\frac{-5}{9} \text{ و } \frac{-7}{18} \quad \times$$

$$\frac{-7}{18} - \frac{-5}{9} = \frac{-7}{18} - \frac{-10}{18} = \frac{-7+10}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{-7}{18} \geq \frac{-5}{9} \quad \text{فإن :} \quad \frac{-7}{18} - \frac{-5}{9} \geq 0 \quad \text{و منه فإن :} \quad \frac{1}{6} \geq 0 \quad \text{إذن : بما أن :}$$

$$-\sqrt{2} + \frac{1}{2} \text{ و } -\sqrt{2} \quad \times$$

$$-\sqrt{2} + \frac{1}{2} \geq -\sqrt{2} \quad \text{لدينا :} \quad \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{يعني أن :} \quad -\sqrt{2} + \frac{1}{2} \geq 0 + (-\sqrt{2}) \quad \text{و منه فإن :}$$

$$\frac{12}{5} + 3^{2012} \text{ و } \frac{3}{7} + 3^{2012} \quad \times$$

$$\frac{12}{5} - \frac{3}{7} = \frac{84}{35} - \frac{15}{35} = \frac{69}{35} \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{12}{5} + 3^{2012} \geq \frac{3}{7} + 3^{2012} \quad \text{إذن : بما أن :} \quad \frac{69}{35} \geq 0 \quad \text{فإن :} \quad \frac{12}{5} - \frac{3}{7} \geq 0 \quad \text{و منه فإن :} \quad \frac{12}{5} \geq \frac{3}{7} \quad \text{بالتالي فإن :}$$

$$2\sqrt{7} \times \frac{11}{25} \text{ و } 2\sqrt{7} \times \frac{18}{5} \quad \times$$

$$\frac{11}{25} - \frac{18}{5} = \frac{11}{25} - \frac{90}{25} = \frac{-79}{25} \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{11}{25} \leq \frac{18}{5} \quad \text{فإن :} \quad \frac{11}{25} - \frac{18}{5} \leq 0 \quad \text{و منه فإن :} \quad \frac{-79}{25} \leq 0 \quad \text{إذن : بما أن :}$$

$$\frac{11}{25} \times 2\sqrt{7} \leq \frac{18}{5} \times 2\sqrt{7} \quad \text{و بما أن :} \quad 2\sqrt{7} > 0 \quad \text{فإن :}$$

$$-\sqrt{3} \times \frac{13}{7} \text{ و } -\sqrt{3} \times \frac{11}{2} \quad \times$$

$$\frac{13}{7} - \frac{11}{2} = \frac{26}{14} - \frac{77}{14} = \frac{-51}{14} \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{13}{7} \leq \frac{11}{2} \quad \text{فإن :} \quad \frac{13}{7} - \frac{11}{2} \leq 0 \quad \text{و منه فإن :} \quad \frac{-51}{14} \leq 0 \quad \text{إذن : بما أن :}$$

$$-\sqrt{3} \times \frac{13}{7} \geq -\sqrt{3} \times \frac{11}{2} \quad \text{و بما أن :} \quad -\sqrt{3} < 0 \quad \text{فإن :}$$

(2) - x و y عددين حقيقيين بحيث : $x > 0$ و $y < 0$.

✗ لنفرض : $x+y$ و $y-x$:

لدينا : $(x+y)-(y-x)=x+y-y+x=2x$.

و بما أن : $x > 0$ فإن $2x > 0$ و منه فإن : $(x+y)-(y-x) > 0$ و بالتالي فإن : $x+y > y-x$.

✗ لنفرض : $3y+x$ و $4y+x$:

لدينا : $(3y+x)-(4y+x)=3y+x-4y-x=-y$.

و بما أن : $y < 0$ فإن $-y > 0$ و منه فإن : $(3y+x)-(4y+x) > 0$ و بالتالي فإن : $3y+x > 4y+x$.

(3) - قارن العددين الحقيقيين a و b بحيث : $a = \sqrt{12} + \sqrt{27}$ و $b = \sqrt{48}$:

لدينا : $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ و $\sqrt{12} + \sqrt{27} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

و بما أن : $5\sqrt{3} \geq 4\sqrt{3}$ فإن : $\sqrt{12} + \sqrt{27} \geq \sqrt{48}$ و بالتالي فإن : $a \geq b$.

تمرين ② :

(1) - لنفرض بين ما يلي :

✗ $2\sqrt{17}$ و $3\sqrt{7}$:

لدينا : $(2\sqrt{17})^2 = 68$ و $(3\sqrt{7})^2 = 63$.

إذن : $(3\sqrt{7})^2 \leq (2\sqrt{17})^2$ و بما أن : $\left. \begin{array}{l} 3\sqrt{7} > 0 \\ 2\sqrt{17} > 0 \end{array} \right\}$ فإن : $3\sqrt{7} \leq 2\sqrt{17}$.

✗ $-3\sqrt{11}$ و $-5\sqrt{5}$:

لدينا : $(-3\sqrt{11})^2 = 99$ و $(-5\sqrt{5})^2 = 125$.

إذن : $(-5\sqrt{5})^2 \geq (-3\sqrt{11})^2$ و بما أن : $\left. \begin{array}{l} -5\sqrt{5} < 0 \\ -3\sqrt{11} < 0 \end{array} \right\}$ فإن : $-5\sqrt{5} \leq -3\sqrt{11}$.

✗ $\sqrt{3}-\sqrt{17}$ و $3\sqrt{5}$:

لدينا : $3\sqrt{5} > 0$.

*/ لنحدد إشارة $\sqrt{3}-\sqrt{17}$.

لدينا : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{3}^2 = 3 \\ \sqrt{17}^2 = 17 \end{array} \right\}$ إذن : $\sqrt{3}^2 < \sqrt{17}^2$ و بما أن : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{3} > 0 \\ \sqrt{17} > 0 \end{array} \right\}$ فإن : $\sqrt{3} \leq \sqrt{17}$ و منه فإن : $\sqrt{3}-\sqrt{17} < 0$.

بما أن : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{3}-\sqrt{17} < 0 \\ 3\sqrt{5} > 0 \end{array} \right\}$ فإن : $\sqrt{3}-\sqrt{17} < 3\sqrt{5}$.

✗ $\sqrt{3}+2$ و $\sqrt{7+2\sqrt{11}}$:

لدينا : $(\sqrt{3}+2)^2 = \sqrt{3}^2 + 2 \times \sqrt{3} \times 2 + 2^2 = 3 + 4\sqrt{3} + 4 = 7 + 4\sqrt{3}$ و $(\sqrt{7+2\sqrt{11}})^2 = 7 + 2\sqrt{11}$.

* / لنفازن : $4\sqrt{3}$ و $2\sqrt{11}$:

$$\left. \begin{array}{l} (4\sqrt{3})^2 = 48 \\ (2\sqrt{11})^2 = 44 \end{array} \right\} \text{ لدينا : } \text{و} \quad \left. \begin{array}{l} 4\sqrt{3} > 0 \\ 2\sqrt{11} > 0 \end{array} \right\} \text{ و بما أن : } \text{و} \quad \left. \begin{array}{l} 4\sqrt{3} \geq 2\sqrt{11} \\ 4\sqrt{3} > 0 \end{array} \right\} \text{ إذن : } \text{و} \quad \left. \begin{array}{l} 4\sqrt{3} \geq 2\sqrt{11} \\ 4\sqrt{3} > 0 \end{array} \right\} \text{ فإن : } 4\sqrt{3} \geq 2\sqrt{11} .$$

$$\text{و منه فإن : } 7 + 4\sqrt{3} \geq 7 + 2\sqrt{11} \quad \text{أي} \quad (\sqrt{3} + 2)^2 \geq (\sqrt{7 + \sqrt{11}})^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{3} + 2 > 0 \\ \sqrt{7 + \sqrt{11}} > 0 \end{array} \right\} \text{ و بما أن : } \text{و} \quad \left. \begin{array}{l} \sqrt{3} + 2 > 0 \\ \sqrt{7 + \sqrt{11}} > 0 \end{array} \right\} \text{ فإن : } \boxed{\sqrt{3} + 2 \geq \sqrt{7 + \sqrt{11}}} .$$

(2) - a و b عددان حقيقيان موجبان بحيث : $a \leq b$.

$$\text{ (أ) -- لثبت أن : } a + 1 \leq b + \frac{5}{4} .$$

$$\text{ لدينا : } 5 > 4 , \text{ إذن : } 1 \leq \frac{5}{4} \text{ و بما أن : } a \leq b \text{ فإن : } \boxed{a + 1 \leq b + \frac{5}{4}} .$$

$$\text{ لثبت أن : } b + \sqrt{7} \geq a - 3\sqrt{7} .$$

$$\text{ لدينا : } \sqrt{7} \geq -3\sqrt{7} \text{ و بما أن : } b \geq a \text{ فإن : } b + \sqrt{7} \geq a + (-3\sqrt{7}) \text{ أي : } \boxed{b + \sqrt{7} \geq a - 3\sqrt{7}} .$$

$$\text{ (ب) -- لنفازن العددين : } \frac{a^2 + 3b^2}{4} \text{ و } b^2 .$$

$$\text{ لدينا : } \frac{a^2 + 3b^2}{4} - b^2 = \frac{a^2 + 3b^2}{4} - \frac{4b^2}{4} = \frac{a^2 + 3b^2 - 4b^2}{4} = \frac{a^2 - b^2}{4} .$$

$$\text{ و بما أن : } a \leq b \text{ فإن : } a^2 \leq b^2 \text{ و منه فإن : } a^2 - b^2 \leq 0 , \text{ و بما أن } 4 \geq 0 \text{ فإن : } \frac{a^2 - b^2}{4} \leq 0$$

$$\text{ و منه فإن : } \frac{a^2 + 3b^2}{4} - b^2 \leq 0 \text{ و بالتالي فإن : } \boxed{\frac{a^2 + 3b^2}{4} \leq b^2} .$$

(3) - a و b و c أعداد حقيقية موجبة .

$$\text{ (أ) -- لثبت أن : } a^2 + b^2 \geq 2ab .$$

$$\text{ لدينا : } (a^2 + b^2) - 2ab = a^2 + b^2 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$\text{ و بما أن : } (a - b)^2 \geq 0 \text{ فإن : } (a^2 + b^2) - 2ab \geq 0 \text{ و بالتالي فإن : } a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\text{ (ب) -- لنستنتج أن : } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ a^2 + c^2 \geq 2ac \end{array} \right\} \text{ لدينا من خلال ما سبق أن : } \left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ a^2 + c^2 \geq 2ac \end{array} \right\} \text{ و منه فإن : } (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (a^2 + c^2) \geq 2ab + 2bc + 2ac$$

$$\text{ أي : } 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2(ab + bc + ac) \text{ و منه فإن : } a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + a^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ac)$$

$$\text{ إذن : } 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ac) \text{ و منه فإن : } a^2 + b^2 + c^2 = \frac{2(ab + bc + ac)}{2}$$

$$\text{ و بالتالي فإن : } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

(ج) --علما أن : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ لنبين أن : $(a+b+c)^2 = 1 + 2(ab+bc+ac)$.
لدينا :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2 \times (a+b) \times c + c^2 \\&= (a+b)^2 + 2c(a+b) + c^2 \\&= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\&= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \\&= (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab+bc+ac) \\&= 1 + 2(ab+bc+ac)\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{(a+b+c)^2 = 1 + 2(ab+bc+ac)}$

(د) --لنستنتج من ما سبق أن : $a+b+c \leq \sqrt{3}$.

نعلم أن : ٩ $\left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 \geq ab+bc+ac \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{array} \right.$ ، إذن : $1 \geq ab+bc+ac$ (١) .

و بما أن : $(a+b+c)^2 = 1 + 2(ab+bc+ac)$ فإن : $ab+bc+ac = \frac{(a+b+c)^2 - 1}{2}$ (٢) .

و من (١) و (٢) نستنتج أن : $1 \geq \frac{(a+b+c)^2 - 1}{2}$ أي : $\frac{(a+b+c)^2 - 1}{2} \leq 1$ ،

و منه فإن : $(a+b+c)^2 - 1 \leq 2$ يعني أن : $(a+b+c)^2 \leq 2 + 1$ أي : $(a+b+c)^2 \leq 3$

و بالتالي فإن : $\sqrt{(a+b+c)^2} \leq \sqrt{3}$ أي : $\boxed{a+b+c \leq \sqrt{3}}$.

تمرين ③ :

(١) - لنبين أن : $x - y = \frac{\sqrt{3}-7}{2}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}x - y &= \frac{2}{\sqrt{3}+1} - \frac{5+\sqrt{3}}{2} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} - \frac{5+\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}^2-1^2} - \frac{5+\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}-2}{3-1} - \frac{5+\sqrt{3}}{2} \\&= \frac{2\sqrt{3}-2}{2} - \frac{5+\sqrt{3}}{2} \\&= \frac{2\sqrt{3}-2-5-\sqrt{3}}{2} \\&= \frac{\sqrt{3}-7}{2}\end{aligned}$$

(2) -- لنقارن العددين : $\sqrt{3}$ و 7 .

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{3}^2 = 3 \\ 7^2 = 49 \end{array} \right\} \text{ لدينا : } \sqrt{3}^2 \leq 7^2 : \text{ إذن : } \sqrt{3} \leq 7 \text{ و بما أن : } \left. \begin{array}{l} \sqrt{3} > 0 \\ 7 > 0 \end{array} \right\} \text{ فإن : } \boxed{\sqrt{3} \leq 7} .$$

(ب) -- لنستنتج مقارنة x و y :

$$\text{لدينا : } \sqrt{3} \leq 7 \text{ يعني أن : } \sqrt{3} - 7 \leq 0 \text{ و منه فإن : } \frac{\sqrt{3} - 7}{2} \leq 0 \text{ أي : } x - y \leq 0$$

و بالتالي فإن : $\boxed{x \leq y}$.

🌸 تمرين ④ :

(1) -- لنقارن العددين : $\sqrt{7}$ و 2 .

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{7}^2 = 7 \\ 2^2 = 4 \end{array} \right\} \text{ لدينا : } \sqrt{7}^2 \geq 2^2 : \text{ إذن : } \sqrt{7} \geq 2 \text{ و بما أن : } \left. \begin{array}{l} \sqrt{7} > 0 \\ 2 > 0 \end{array} \right\} \text{ فإن : } \boxed{\sqrt{7} \geq 2} .$$

✖ لنقارن العددين : $\sqrt{3}$ و 5 .

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{3}^2 = 3 \\ 5^2 = 25 \end{array} \right\} \text{ لدينا : } \sqrt{3}^2 \leq 5^2 : \text{ إذن : } \sqrt{3} \leq 5 \text{ و بما أن : } \left. \begin{array}{l} \sqrt{3} > 0 \\ 5 > 0 \end{array} \right\} \text{ فإن : } \boxed{\sqrt{3} \leq 5} .$$

$$(ب) -- \text{ لنستنتج تبسيط العددين : } m = \sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2} \text{ و } n = \sqrt{(\sqrt{3} - 5)^2} .$$

$$\text{نعلم أن : } \sqrt{7} \geq 2 \text{ يعني : } \sqrt{7} - 2 \geq 0 \text{ و منه فإن : } \boxed{m = \sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2} = \sqrt{7} - 2} .$$

$$\text{و نعلم أن : } \sqrt{3} \leq 5 \text{ يعني أن : } \sqrt{3} - 5 \leq 0 \text{ و منه فإن : } \boxed{n = \sqrt{(\sqrt{3} - 5)^2} = 5 - \sqrt{3}} .$$

(2) -- نشر و بسط العددين : $(\sqrt{5} - 4)^2$ و $(6 - \sqrt{2})^2$.

$$\left. \begin{array}{l} (\sqrt{5} - 4)^2 = \sqrt{5}^2 - 2 \times 4 \times \sqrt{5} + 4^2 = 5 - 8\sqrt{5} + 16 = 21 - 8\sqrt{5} \\ (6 - \sqrt{2})^2 = 6^2 - 2 \times 6 \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 36 - 12\sqrt{2} + 2 = 38 - 12\sqrt{2} \end{array} \right\} \text{ لدينا : } \text{ و } .$$

(ب) -- ✖ لنستنتج تبسيط العدد : $v = \sqrt{21 - 8\sqrt{5}}$.

$$\text{لدينا : } (\sqrt{5} - 4)^2 = 21 - 8\sqrt{5} \text{ يعني أن : } v = \sqrt{21 - 8\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 4)^2} .$$

*/ لنحدد إشارة : $\sqrt{5} - 4$.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{5}^2 = 5 \\ 4^2 = 16 \end{array} \right\} \text{ لدينا : } \sqrt{5}^2 \leq 4^2 : \text{ إذن : } \sqrt{5} \leq 4 \text{ و بما أن : } \left. \begin{array}{l} \sqrt{5} > 0 \\ 4 > 0 \end{array} \right\} \text{ فإن : } \sqrt{5} \leq 4 \text{ و منه : } \boxed{\sqrt{5} - 4 \leq 0} .$$

$$\text{و بالتالي فإن : } \boxed{v = \sqrt{21 - 8\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 4)^2} = 4 - \sqrt{5}} .$$

✖ لنستنتج تبسيطا للعدد : $w = \sqrt{38-12\sqrt{2}}$.

لدينا : $(6-\sqrt{2})^2 = 38-12\sqrt{2}$ يعني أن : $w = \sqrt{38-12\sqrt{2}} = \sqrt{(6-\sqrt{2})^2}$.

*/ لنحدد إشارة : $6-\sqrt{2}$.

لدينا : $\left. \begin{array}{l} 6^2 = 36 \\ \sqrt{2}^2 = 2 \end{array} \right\}$ ، إذن : $6^2 \geq \sqrt{2}^2$ و بما أن : $\left. \begin{array}{l} 6 > 0 \\ \sqrt{2} > 0 \end{array} \right\}$ فإن : $6 \geq \sqrt{2}$ و منه فإن : $\boxed{6-\sqrt{2} \geq 0}$.

و بالتالي فإن : $w = \sqrt{38-12\sqrt{2}} = \sqrt{(6-\sqrt{2})^2} = 6-\sqrt{2}$.

🌸 تمرين ⑤ :

(1) - ✖ لنثبت أن : $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$.

لدينا : $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$.

✖ لنثبت أن : $\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

لدينا : $\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}^2-1^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

(2) - (أ) -- لنقارن العددين : $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}+1$.

لدينا : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{5}^2 = 5 \\ 1^2 = 1 \end{array} \right\}$ ، إذن : $\sqrt{5}^2 \geq 1^2$ و بما أن : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{5} > 0 \\ 1 > 0 \end{array} \right\}$ فإن : $\sqrt{5} \geq 1$ و منه فإن : $\boxed{\sqrt{5}+\sqrt{3} \geq \sqrt{3}+1}$.

(ب) -- لنستنتج مقارنة العددين : $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

نعلم أن : $\sqrt{5}+\sqrt{3} \geq \sqrt{3}+1$ يعني أن : $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}+1}$ و بما أن : $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{array} \right\}$ فإن :

$$\boxed{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} \leq \frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

🌸 تمرين ⑥ :

(1) - لنبين أن : $\frac{2}{3} \leq c \leq 1$.

لدينا : $\frac{1}{2} \leq \frac{3c-1}{2} \leq 1$ يعني أن : $\frac{1}{2} \times 2 \leq \frac{3c-1}{2} \times 2 \leq 1 \times 2$ و منه فإن : $1 \leq 3c-1 \leq 2$.

إذن : $1+1 \leq 3c-1+1 \leq 2+1$ أي : $2 \leq 3c \leq 3$ و منه فإن : $2 \times \frac{1}{3} \leq 3c \times \frac{1}{3} \leq 3 \times \frac{1}{3}$ و بالتالي فإن : $\boxed{\frac{2}{3} \leq c \leq 1}$.

(2) - لنؤطر $a + b$:

لدينا : $9 \leq a \leq 16$ ، إذن : $9 - 7 \leq a + b \leq 16 - 6$ و منه فإن : $2 \leq a + b \leq 10$.

لنؤطر ab :

لدينا : $9 \leq a \leq 16$ ، إذن : $9 \times 6 \leq a \times (-b) \leq 16 \times 7$ أي : $54 \leq -ab \leq 112$ و منه فإن : $-112 \leq ab \leq -54$.

لنؤطر $\frac{a}{b}$:

لدينا : $9 \leq a \leq 16$ ، إذن : $9 \times \frac{1}{7} \leq a \times \frac{1}{-b} \leq 16 \times \frac{1}{6}$ أي : $\frac{9}{7} \leq \frac{a}{-b} \leq \frac{16}{6}$ ،

و منه فإن : $\frac{9}{7} \leq \frac{a}{-b} \leq \frac{8}{3}$ و بالتالي فإن : $-\frac{8}{3} \leq \frac{a}{b} \leq -\frac{9}{7}$.

لنؤطر $-3a + 2b - 15$:

لدينا : $9 \leq a \leq 16$ ، إذن : $-3 \times 16 \leq -3a \leq -3 \times 9$ أي : $-48 \leq -3a \leq -27$ ، $-7 \leq b \leq -6$ ، إذن : $2 \times (-7) \leq 2b \leq 2 \times (-6)$ أي : $-14 \leq 2b \leq -12$ ،

و منه فإن : $-48 - 14 - 15 \leq -3a + 2b - 15 \leq -27 - 12 - 15$ و بالتالي فإن : $-77 \leq -3a + 2b - 15 \leq -54$.

لنؤطر $2\sqrt{a} + d$:

لدينا : $9 \leq a \leq 16$ ، إذن : $\sqrt{9} \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{16}$ أي : $3 \leq \sqrt{a} \leq 4$ و منه فإن : $3 - 2 \leq \sqrt{a} + d \leq 4 - 1$ ، $-2 \leq d \leq -1$ ، إذن : $-2 \leq d \leq -1$ ، و بالتالي فإن : $1 \leq \sqrt{a} + d \leq 3$.

لنؤطر $a^2 + bd - b^2$:

لدينا : $9 \leq a \leq 16$ ، إذن : $81 \leq a^2 \leq 256$ ، $6 \leq -b \leq 7$ ، $1 \leq -d \leq 2$ ، $6 \leq bd \leq 14$ ، $-49 \leq -b^2 \leq -36$ و منه فإن : $81 + 6 - 49 \leq a^2 + bd - b^2 \leq 256 + 14 - 36$ ،

و بالتالي فإن : $38 \leq a^2 + bd - b^2 \leq 234$.

لنؤطر $\frac{2b-d}{a+b}$: نضع : $\frac{2b-d}{a+b} = (2b-d) \times \frac{1}{a+b}$.

لدينا : $-7 \leq b \leq -6$ ، إذن : $-14 \leq 2b \leq -12$ و منه فإن : $-14 + 1 \leq 2b - d \leq -12 + 2$ أي : $-13 \leq 2b - d \leq -10$ ، $-2 \leq d \leq -1$ ، إذن : $1 \leq -d \leq 2$ ،

نعلم أن : $2 \leq a+b \leq 10$ ، إذن : $\boxed{\frac{1}{10} \leq \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2}}$

لدينا : $\left. \begin{array}{l} 10 \leq -(2b-d) \leq 13 \\ \frac{1}{10} \leq \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\}$: إذن ، $\left. \begin{array}{l} -13 \leq 2b-d \leq -10 \\ \frac{1}{10} \leq \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\}$ ومنت فإن : $10 \times \frac{1}{10} \leq -(2b-d) \times \frac{1}{a+b} \leq 13 \times \frac{1}{2}$

أي : $1 \leq -\frac{2b-d}{a+b} \leq \frac{13}{2}$ و بالتالي فإن : $\boxed{-\frac{13}{2} \leq \frac{2b-d}{a+b} \leq -1}$

✖ لنؤطر $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$

لدينا : $\left. \begin{array}{l} 81 \leq a^2 \leq 256 \\ 54 \leq -ab \leq 112 \\ 36 \leq b^2 \leq 49 \end{array} \right\}$ و منه فإن : $\left. \begin{array}{l} 81 \leq a^2 \leq 256 \\ -112 \leq ab \leq -54 \\ (-6)^2 \leq b^2 \leq (-7)^2 \end{array} \right\}$ و : إذن ، $\left. \begin{array}{l} 9 \leq a \leq 16 \\ -7 \leq b \leq -6 \end{array} \right\}$

إذن : $81+54+36 \leq a^2 - ab + b^2 \leq 256+112+49$ و منه فإن : $171 \leq a^2 - ab + b^2 \leq 417$

و بالتالي فإن : $\sqrt{171} \leq \sqrt{a^2 - ab + b^2} \leq \sqrt{417}$ أي : $\boxed{3\sqrt{19} \leq \sqrt{a^2 - ab + b^2} \leq \sqrt{417}}$