هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

# الدرس ⑥ : الترتيب والعمليات

## I - مقارنة عددين حقيقيين :

### 1) نشاط ① :

قارن كل من العددين a و b في الحالات التالية :

(1) $a=\frac{12}{7}$ ، $b=\frac{15}{7}$ (3) $a=\frac{5}{4}$ ، $b=\frac{11}{8}$

(2) $a=\frac{15}{14}$ ، $b=\frac{-12}{7}$ (4) $a=\frac{6}{5}$ ، $b=\frac{6}{11}$

جواب :

(1) لدينا : $15>12$ إذن : $\frac{15}{7}>\frac{12}{7}$

(2) لدينا : $-\frac{12}{7}<0$ ، $\frac{15}{14}>0$ إذن : $-\frac{12}{7}<\frac{15}{14}$

(3) لدينا : $a=\frac{5}{4}=\frac{10}{8}$ ، لدينا : $10<11$

إذن : $\frac{10}{8}<\frac{11}{8}$ إذن : $\frac{5}{4}<\frac{11}{8}$

(4) لدينا : $5<11$ إذن : $\frac{6}{5}>\frac{6}{11}$

### 2) تعاريف ① :

> a و b عددان حقيقيان
>
> * إذا كان : $a-b\leqslant 0$ فإن : $a\leqslant b$
> * إذا كان : $a-b\geqslant 0$ فإن : $a\geqslant b$
>
> لمقارنة عددين حقيقيين، نحدد إشارة فرقهما .

### 3) أمثلة :

(1) لنقارن $a=\frac{4}{35}$ و $b=\frac{2}{15}$

لدينا : $a-b=\frac{4}{35}-\frac{2}{15}=\frac{12-14}{105}=\frac{-2}{105}$

لدينا : $-\frac{2}{105}<0$ إذن $a-b<0$

إذن : $\boxed{a<b}$

(2) لنقارن العددين $2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

لدينا : $(2\sqrt{3}-4)-(\sqrt{3}-\sqrt{5})=2\sqrt{3}-4-\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{5}-4$

بما أن : $\sqrt{3}+\sqrt{5}-4>0$ فإن : $(2\sqrt{3}-4)-(\sqrt{3}-\sqrt{5})>0$

وهذا يعني : $\boxed{2\sqrt{3}-4>\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

### 4) تمرين تطبيقي :

قارن كل من العددين التاليين :

(1) $\frac{12}{7}$ و $\frac{15}{14}$

(2) $-3\sqrt{2}-1$ و $7+\sqrt{2}$

(3) $5\sqrt{3}+4$ و $\sqrt{3}-1$

الحل :

(1) $\frac{12}{7}-\frac{15}{14}=\frac{24-15}{14}=\frac{9}{14}$

بما أن : $\frac{9}{14}>0$ فإن : $\frac{12}{7}-\frac{15}{14}>0$

وهذا يعني : $\frac{15}{14}<\frac{12}{7}$

(2) $(7+\sqrt{2})-(-3\sqrt{2}-1)=7+\sqrt{2}+3\sqrt{2}+1$

$=4\sqrt{2}+8$

بما أن : $4\sqrt{2}+8>0$ فإن : $(7+\sqrt{2})-(-3\sqrt{2}-1)>0$

وهذا يعني : $7+\sqrt{2}>-3\sqrt{2}-1$

(3) $(5\sqrt{3}+4)-(\sqrt{3}-1)=5\sqrt{3}+4-\sqrt{3}+1$

$=4\sqrt{3}+5$

بما أن : $4\sqrt{3}+5>0$ فإن : $(5\sqrt{3}+4)-(\sqrt{3}-1)>0$

وهذا يعني : $5\sqrt{3}+4>\sqrt{3}-1$

## II - الترتيب والعمليات :

### 1) الترتيب والجمع :

#### أ - خاصية ① :

> a و b أعداد حقيقية
>
> * إذا كان : $a\leqslant b$ فإن : $a+c\leqslant b+c$
> * إذا كان : $a+c\leqslant b+c$ فإن : $a\leqslant b$

مثال :

a و b عددان حقيقيان بحيث : $a+b\leqslant b$

لنبين أن : $a+1\leqslant b-3$

لدينا : $a+4\leqslant b$ إذن : $a+4-3\leqslant b-3$

أي : $a+1\leqslant b-3$

#### ب - خاصية ② :

> a و b و c و d أعداد حقيقية
>
> إذا كان : $\begin{cases} a\leqslant b \\ c\leqslant d \end{cases}$ فإن : $a+c\leqslant b+d$

مثال :

a و b عددان حقيقيان بحيث : $a+3\leqslant 3$ و $b+4\leqslant\sqrt{2}$

لنبين أن : $a+b+7\leqslant 3+\sqrt{2}$

لدينا : $b+4\leqslant\sqrt{2}$ إذن : $b+4+a+3\leqslant\sqrt{2}+3$

أي : $a+3\leqslant 3$

وهذا يعني : $a+b+7\leqslant\sqrt{2}+3$

Talamid.ma للمزيد من الملفات تم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

## 2) الترتيب والعمليات

### أ- نشاط ①:

a و b عددان حقيقيان بحيث: $a \leq b$

① نعلم أن c عدد موجب، قارن $ac$ و $bc$

② نعلم أن c عدد سالب، قارن $ac$ و $bc$

الحل:

① لدينا: $ac - bc = c(a-b)$

بما أن: $a \leq b$ فإن: $a-b \leq 0$

و c موجب إذن: $c(a-b) \leq 0$

أي: $ac - bc \leq 0$

وبالتالي $\boxed{ac \leq bc}$

② لدينا: $ac - bc = c(a-b)$

لدينا: $a-b \leq 0$ و بما أن c سالب

فإن $c(a-b) \geq 0$ ومنه فإن: $ac - bc \geq 0$

وبالتالي فإن $\boxed{ac \geq bc}$

### ب- خاصية ③:

a و b عددان حقيقيان

* إذا كان $a \leq b$ و $c > 0$ فإن: $axc \leq bxc$
* إذا كان $a \leq b$ و $c < 0$ فإن: $axc \geq bxc$

* مثال: a و b عددان حقيقيان بحيث $a \geq \frac{4}{3}$ و $b \geq \sqrt{3}$

لنستنتج $3a$ و $-2b$

لدينا $a \geq \frac{4}{3}$ أي $3xa \geq \frac{4}{3}x3$ إذن $3a \geq 4$

ولدينا $b \geq \sqrt{3}$ أي $-2xb \leq -2\sqrt{3}$ إذن $-2b \leq -2\sqrt{3}$

* ملاحظة: a و b عددان حقيقيان

إذا كان $a \leq b$ فإن $-a \geq -b$

### ج- خاصية ④:

a و b و c و d أعداد حقيقية موجبة

إذا كان $\left.\begin{matrix} a \leq b \\ c \leq d \end{matrix}\right\}$ فإن: $axc \leq bxd$

* مثال: x و y عددان حقيقيان موجبان بحيث: $x \leq \sqrt{3}$ و $y \leq 2\sqrt{6}$

لنبين أن $xy \leq 6\sqrt{2}$

لدينا $\left.\begin{matrix} x \leq \sqrt{3} \\ y \leq 2\sqrt{6} \end{matrix}\right\}$ إذن $xxy \leq \sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$

$xxy \leq 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}$

$xy \leq 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}^2$

$xy \leq 6\sqrt{2}$

### د- تمرين تطبيقي:

x و y عددان حقيقيان بحيث: $x \geq 1$ و $y \geq 2$

بين أن: $(x-1)(y-2) \geq 0$

* الجواب:

لدينا: $x \geq 1$ إذن $x-1 \geq 0$

و $y \geq 2$ إذن: $y-2 \geq 0$

بمعنى أن: $(x-1)(y-2) \geq 0$

## 3) الترتيب والعمليات:

### أ- خاصية ⑤:

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا

إذا كان $a \leq b$ فإن: $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ والعكس صحيح

### ب- أمثلة:

* لدينا: $2 \leq 4$ إذن: $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$
* لدينا $11 > 5$ إذن: $\frac{1}{11} < \frac{1}{5}$

### ج- تمرين تطبيقي:

x عدد حقيقي بحيث $x \geq 1$ بين أن $\frac{-5}{x+2\sqrt{3}} \geq \frac{-5}{1+2\sqrt{3}}$

لدينا $x \geq 1$ إذن: $x+2\sqrt{3} \geq 1+2\sqrt{3}$

ومنه فإن: $\frac{1}{x+2\sqrt{3}} \leq \frac{1}{1+2\sqrt{3}}$

وبالتالي فإن: $\frac{-5}{x+2\sqrt{3}} \geq \frac{-5}{1+2\sqrt{3}}$

## 4) خاصيات أخرى: المربع والجذر المربع

### أ- خاصية ⑥: المربع

a و b عددان حقيقيان موجبان

* إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$
* إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$

* ملاحظة:

a و b عددان حقيقيان سالبان

إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \geq b^2$

* أمثلة:

* لنقارن $3$ و $2\sqrt{2}$

لدينا: $\left.\begin{matrix} (2\sqrt{2})^2 = 4x2 \\ = 8 \end{matrix}\right\}$ إذن $\left.\begin{matrix} 3^2 = 9 \end{matrix}\right\}$

بما أن: $8 < 9$ فإن: $(2\sqrt{2})^2 < 3^2$

وبما أن: $2\sqrt{2} < 3$

Talamid.ma للمزيد من الملفات تم بزيارة الموقع

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

* لمقارنة $-3\sqrt{2}$ و $-2\sqrt{3}$

لدينا $\begin{cases}(2\sqrt{3})^2 = 4\times 3 = 12\\ (3\sqrt{2})^2 = 9\times 2 = 18\end{cases}$ بما أن $12 < 18$ فإن $(2\sqrt{3})^2 < (3\sqrt{2})^2$

إذن $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$ وبالتالي $-2\sqrt{3} > -3\sqrt{2}$

ب - خاصية ⑦: الجذر المربع:

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان.

* إذا كان $a \leqslant b$ فإن $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$
* إذا كان $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$ فإن $a \leqslant b$

ج - تمرين تطبيقي:

① قارن $3\sqrt{3}$ و $4\sqrt{2}$ ثم $-\sqrt{91}$ و $-6\sqrt{3}$

② قارن العددين $\sqrt{5}+4$ و $\sqrt{3}+4$

* جواب:

① لدينا: $\begin{cases}(3\sqrt{3})^2 = 9\times 3 = 27\\ (4\sqrt{2})^2 = 16\times 2 = 32\end{cases}$ بما أن $27 < 32$ فإن $(3\sqrt{3})^2 < (4\sqrt{2})^2$

إذن $3\sqrt{3} < 4\sqrt{2}$

* لدينا: $\begin{cases}\sqrt{91}^2 = 91\\ (6\sqrt{3})^2 = 36\times 3 = 108\end{cases}$ بما أن $91 < 108$ فإن $\sqrt{91}^2 < (6\sqrt{3})^2$

إذن $\sqrt{91} < 6\sqrt{3}$

وبالتالي $-\sqrt{91} > -6\sqrt{3}$

② لدينا: $\begin{cases}\sqrt{3}^2 = 3\\ \sqrt{5}^2 = 5\end{cases}$ إذن $\sqrt{3}^2 < \sqrt{5}^2$

$\sqrt{3} < \sqrt{5}$

وبالتالي: $\sqrt{3}+4 < \sqrt{5}+4$

## III - التأطير:

### 1) تأطير مجموع عددين:

* خاصية ⑧:

نعتبر جميع الأعداد الحقيقية

إذا كان $\begin{cases}a \leqslant x \leqslant b\\ c \leqslant y \leqslant d\end{cases}$ فإن: $a+c \leqslant x+y \leqslant b+d$

* مثال: $x$ و $y$ عددان حقيقيان بحيث:

$2 \leqslant x \leqslant 5$ و $-3 \leqslant y \leqslant -1$

أطر $x+y$

لدينا $\begin{cases}2 \leqslant x \leqslant 5\\ -3 \leqslant y \leqslant -1\end{cases}$ إذن $2+(-3) \leqslant x+y \leqslant 5+(-1)$

$-1 \leqslant x+y \leqslant 4$

### 2) تأطير جداء عددين حقيقيين:

* خاصية ⑨:

$x$ عدد حقيقي بحيث: $a \leqslant x \leqslant b$

لدينا: $-b \leqslant -x \leqslant -a$

* مثال: $-4 \leqslant x \leqslant 3$ أطر $-x$

لدينا: $-3 < -x < 4$

### 3) تأطير خارج عددين:

* خاصية ⑩:

نعتبر جميع الأعداد الحقيقية

إذا كان $\begin{cases}a \leqslant x \leqslant b\\ c \leqslant y \leqslant d\end{cases}$ فإن: $a-d \leqslant x-y \leqslant b-c$

* ملاحظة هامة:

لدينا: $a-b = a+(-b)$

إذن لتأطير $a-b$ نأطر $a$ و $-b$ ثم نطبق الخاصية ⑧

(تأطير المجموع)

* مثال: $x$ و $y$ عددان حقيقيان بحيث:

$3 \leqslant x \leqslant 8$ و $-4 \leqslant y \leqslant 2$

لنؤطر $x-y$

* لدينا: إذن $-4 \leqslant y \leqslant 2$

$-2 \leqslant -y \leqslant 4$

لدينا $\begin{cases}3 \leqslant x \leqslant 8\\ -2 \leqslant -y \leqslant 4\end{cases}$ إذن: $3+(-2) \leqslant x+(-y) \leqslant 8+4$

$1 \leqslant x-y \leqslant 12$

### 4) تأطير جداء عددين:

* خاصية ⑪:

نعتبر جميع الأعداد الحقيقية موجبة

إذا كان $\begin{cases}a \leqslant x \leqslant b\\ c \leqslant y \leqslant d\end{cases}$ فإن: $a \times c \leqslant x \times y \leqslant b \times d$

* أمثلة: حالة ①: جميع الأعداد الحقيقية موجبة

$3 \leqslant x \leqslant 7$ و $1 \leqslant y \leqslant 4$

لنؤطر $xy$

لدينا $\begin{cases}3 \leqslant x \leqslant 7\\ 1 \leqslant y \leqslant 4\end{cases}$ إذن: $3\times 1 \leqslant x\times y \leqslant 7\times 4$

$3 \leqslant xy \leqslant 28$

* حالة ②: $x$ موجب و $y$ عدد سالب

$4 \leqslant x \leqslant 8$ و $-5 \leqslant y \leqslant -2$ أطر $xy$

أولا يجب أن تكون الأعداد المؤطرة $y$ موجبة

لدينا: $-5 \leqslant y \leqslant -2$ إذن $2 \leqslant -y \leqslant 5$

لدينا $\begin{cases}4 \leqslant x \leqslant 8\\ 2 \leqslant -y \leqslant 5\end{cases}$ لاحظ أن جميع الأعداد المؤطرة $x$ و $-y$ موجبة

إذن: $4\times 2 \leqslant x\times(-y) \leqslant 8\times 5$

$8 \leqslant -xy \leqslant 40$

لدينا $-xy$ هو العدد الذي نؤطر $xy$ وليس $xy$

إذن نشتغل على $-xy$

لدينا: $8 \leqslant -xy \leqslant 40$ إذن: $-40 \leqslant xy \leqslant -8$

للمزيد من الملفات تم بزيارة الموقع Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

## 5) تأطير جداء

* خاصية (12): $x$ و $a$ و $b$ أعداد حقيقية غير منعدمة

بحيث: $a \leqslant x \leqslant b$

$$\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{a}$$

* مثال: لدينا $2 \leqslant x \leqslant 4$ إذن: $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}$

## 6) تأطير خارج حدية

* خاصية (13):

نعتبر جميع الأعداد الحقيقية حيث $d \neq 0$ ، $c \neq 0$ ، $y \neq 0$ بحيث: $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$ إذا كان

فإن:

$$\frac{a}{d} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{b}{c}$$

* ملاحظة هامة: لدينا $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

إذن لتأطير $\frac{a}{b}$ ، نؤطر أولا $\frac{1}{b}$ ثم نطبق الخاصية 11 (تأطير الجداء)

* أمثلة: حالة (1): جميع الأعداد موجبة

$x$ و $y$ عددان حقيقيان بحيث

أطر $\frac{x}{y}$ علما أن $6 \leqslant x \leqslant 10$ و $2 \leqslant y \leqslant 3$

لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ إذن لنؤطر أولا $\frac{1}{y}$

لدينا: $2 \leqslant y \leqslant 3$ إذن: $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{2}$

لدينا: $\begin{cases} 6 \leqslant x \leqslant 10 \\ \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$ إذن: $6 \times \frac{1}{3} \leqslant x \times \frac{1}{y} \leqslant 10 \times \frac{1}{2}$

وبالتالي: $2 \leqslant \frac{x}{y} \leqslant 5$

* حالة (2): $x$ موجب و $y$ سالب

أطر $\frac{x}{y}$ علما أن $6 \leqslant x \leqslant 10$ و $-3 \leqslant y \leqslant -2$

لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ إذن لنؤطر أولا $\frac{1}{y}$

لدينا: $-3 \leqslant y \leqslant -2$ إذن: $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant -\frac{1}{3}$

نلاحظ أن الأعداد المؤطرة $\frac{1}{y}$ سالبة إذن نحولها إلى أعداد موجبة

لدينا: $\frac{1}{3} \leqslant -\frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{2}$ إذن: $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant -\frac{1}{3}$

لدينا: $\begin{cases} 6 \leqslant x \leqslant 10 \\ \frac{1}{3} \leqslant -\frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$ إذن: $6 \times \frac{1}{3} \leqslant x \times \left(-\frac{1}{y}\right) \leqslant 10 \times \frac{1}{2}$

$2 \leqslant -\frac{x}{y} \leqslant 5$

لنحو طرفي هذا الأخير لـ $-\frac{x}{y}$ إذن نتخلص من الإشارة -

لدينا:

$$-5 \leqslant \frac{x}{y} \leqslant -2$$

## 7) كوارق تطبيقية

* تمرين تطبيقي ①: $-4 \leqslant b \leqslant -3$ ، $2 \leqslant a \leqslant 3$

* تأطير $a+b$

لدينا: $\begin{cases} 2 \leqslant a \leqslant 3 \\ -4 \leqslant b \leqslant -3 \end{cases}$ إذن: $2+(-4) \leqslant a+b \leqslant 3+(-3)$

$$-2 \leqslant a+b \leqslant 0$$

* تأطير $a-b$

لدينا: $-4 \leqslant b \leqslant -3$ إذن: $3 \leqslant -b \leqslant 4$

لدينا: $\begin{cases} 2 \leqslant a \leqslant 3 \\ 3 \leqslant -b \leqslant 4 \end{cases}$ إذن: $2+3 \leqslant a+(-b) \leqslant 3+4$

$$5 \leqslant a-b \leqslant 7$$

* تأطير $ab$

لدينا: $\begin{cases} 2 \leqslant a \leqslant 3 \\ 3 \leqslant -b \leqslant 4 \end{cases}$ إذن: $2 \times 3 \leqslant a \times (-b) \leqslant 3 \times 4$

$6 \leqslant -ab \leqslant 12$

وبالتالي:

$$-12 \leqslant ab \leqslant -6$$

* تأطير $\frac{a}{b}$

لدينا: $-4 \leqslant b \leqslant -3$ إذن: $3 \leqslant -b \leqslant 4$

$$-\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant -\frac{1}{4}$$

لدينا: $\begin{cases} 2 \leqslant a \leqslant 3 \\ \frac{1}{4} \leqslant -\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{3} \end{cases}$ إذن: $2 \times \frac{1}{4} \leqslant a \times \left(-\frac{1}{b}\right) \leqslant 3 \times \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} \leqslant -\frac{a}{b} \leqslant 1$

وبالتالي:

$$-1 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant -\frac{1}{2}$$

* تمرين تطبيقي ②: $a$ و $b$ و $c$ أعداد حقيقية حيث:

$-3 \leqslant c \leqslant 5$ ، $-4 \leqslant b \leqslant -2$ ، $6 \leqslant a \leqslant 8$

أطر $\frac{a+b}{a^2}$ ، $2a+2b-4c$ ، $b^2$ ، $a^2$

الحل:

* تأطير $a^2$

لدينا: $6 \leqslant a \leqslant 8$ إذن: $6^2 \leqslant a^2 \leqslant 8^2$

إذن:

$$36 \leqslant a^2 \leqslant 64$$

* تأطير $b^2$

لدينا: $-4 \leqslant b \leqslant -2$ إذن: $(-2)^2 \leqslant b^2 \leqslant (-4)^2$

وبالتالي:

$$4 \leqslant b^2 \leqslant 16$$

Talamid.ma للمزيد من الملفات تم بزيارة الموقع

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

* تأطير $a+2b-4c$ :

لدينا : $-4 \leqslant b \leqslant -2$ ؛ إذن $-8 \leqslant 2b \leqslant -4$

لدينا : $-3 \leqslant c \leqslant 5$ ؛ إذن : $-20 \leqslant -4c \leqslant 12$

لدينا : $\begin{cases} 6 \leqslant a \leqslant 8 \\ -8 \leqslant 2b \leqslant -4 \\ -20 \leqslant -4c \leqslant 12 \end{cases}$ ؛ إذن :

$6-8-20 \leqslant a+2b-4c \leqslant 8-4+12$

$$\boxed{-22 \leqslant a+2b-4c \leqslant 16}$$

وبالتالي :

* تأطير $\dfrac{a+b}{b^2}$ :

لدينا : $\begin{cases} 6 \leqslant a \leqslant 8 \\ -4 \leqslant b \leqslant -2 \end{cases}$ ؛ إذن $6+(-4) \leqslant a+b \leqslant 8+(-2)$ ؛ إذن

$2 \leqslant a+b \leqslant 6$

ولدينا : $4 \leqslant b^2 \leqslant 16$ ؛ إذن $\dfrac{1}{16} \leqslant \dfrac{1}{b^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$

لدينا : $\begin{cases} 2 \leqslant a+b \leqslant 6 \\ \dfrac{1}{16} \leqslant \dfrac{1}{b^2} \leqslant \dfrac{1}{4} \end{cases}$ ؛ إذن $2 \times \dfrac{1}{16} \leqslant \dfrac{a+b}{b^2} \leqslant 6 \times \dfrac{1}{4}$

$$\boxed{\frac{1}{8} \leqslant \frac{a+b}{b^2} \leqslant \frac{3}{2}}$$

وبالتالي :

للمزيد من الملفات تم بزيارة الموقع Talamid.ma