

تمرين: 1-- قارن كل عددين مما يلي:

$$\sqrt{17} \text{ و } \sqrt{13} \text{ ؛ } 2\sqrt{10} \text{ و } 3\sqrt{5} \text{ ؛ } 5\sqrt{2} \text{ و } 7$$

2-- حدد إشارة كل عدد من الأعداد التالية :

$$A = 8 - 6\sqrt{2} \quad \text{أ -}$$

$$B = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} \quad \text{ب -}$$

3-- a عدد حقيقي بحيث $a > 1$:

$$\text{بين أن: } a^2 > a > \sqrt{a} > 1$$

2-الترتيب والجمع: إضافة (أو طرح) نفس العدد إلى طرفي متفاوتة

a و b و m أعداد حقيقية .

$$a \leq b \text{ يعني أن: } a + m \leq b + m$$

مثال 1: لنقارن $\sqrt{5} + 3$ و $\sqrt{7} + 3$

لدينا $5 < 7$ إذن $\sqrt{5} < \sqrt{7}$ وبالتالي $\sqrt{5} + 3 < \sqrt{7} + 3$

مثال 2: علما أن $a > 2$ قارن $a - 5$ و -3 .

لدينا $a > 2$ إذن $a - 5 > 2 - 5$ وبالتالي $a - 5 > -3$.

تمرين: قارن كل عددين مما يلي:

$$5 + \sqrt{10} \text{ و } 5 + 2\sqrt{2} \text{ ؛ } 11 - 2\sqrt{3} \text{ و } 15 - 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} \text{ و } \sqrt{3} + \sqrt{7} \text{ ؛ } \sqrt{11} - 5 \text{ و } 2\sqrt{3} - 5$$

نتيجة: جمع متفاوتتين طرفا بطرف

$$a + m \leq b + n \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq b \\ m \leq n \end{cases}$$

مثال: لنقارن $\sqrt{7} + 2$ و $\sqrt{5} + 1,8$

لدينا $\sqrt{7} > \sqrt{5}$ (لأن $7 > 5$) إذن $\sqrt{7} + 2 > \sqrt{5} + 1,8$ و $2 > 1,8$

(3) - الترتيب والضرب: ضرب طرفي متفاوتة في نفس العدد $\neq 0$

a و b و c أعداد حقيقية .

$$\diamond (a \leq b \text{ و } c > 0) \text{ يعني } a \times c \leq b \times c$$

$$\diamond (a \leq b \text{ و } c < 0) \text{ يعني } a \times c \geq b \times c$$

مثال 1: لنقارن $19\sqrt{5}$ و $23\sqrt{5}$

لدينا ($19 < 23$ و $\sqrt{5}$ عدد موجب) إذن: $19\sqrt{5} < 23\sqrt{5}$

مثال 2: لنقارن $-3\sqrt{6}$ و $-3\sqrt{11}$

لدينا ($\sqrt{6} < \sqrt{11}$ و -3 عدد سالب) إذن: $-3\sqrt{6} > -3\sqrt{11}$

تمرين: قارن كل عددين مما يلي:

(1) - a و b عددين حقيقيين بحيث: $a < b$

$$\text{قارن: } \frac{1}{2}a \text{ و } \frac{1}{2}b \text{ ؛ } -\sqrt{3} \times a \text{ و } -\sqrt{3} \times b$$

(2) - قارن: $-3\sqrt{5}$ و $-\sqrt{44}$ ؛ $-4\sqrt{3}$ و -7

$$\sqrt{10} - 2\sqrt{5} \text{ و } \sqrt{10} - 3\sqrt{2}$$

I _ مقارنة عددين حقيقيين

الطريقة الأولى: تحديد إشارة الفرق

قاعدة: a و b عددين حقيقيين .

$$a \leq b \text{ يعني } a - b \leq 0$$

$$a \geq b \text{ يعني } a - b \geq 0$$

مثال 1: -- لنقارن العددين: $\frac{-7}{9}$ و $\frac{-11}{13}$

نحسب فرقهما:

$$\left(\frac{-11}{13}\right) - \left(\frac{-7}{9}\right) = \frac{-11}{13} + \frac{7}{9} = \frac{-99 + 91}{117} = \frac{-8}{117} < 0$$

$$\text{إذن } \left(\frac{-11}{13}\right) - \left(\frac{-7}{9}\right) < 0 \text{ ومنه } \left(\frac{-11}{13}\right) < \left(\frac{-7}{9}\right)$$

مثال 2: -- a و b عددين حقيقيين موجبان .

$$\text{أثبت أن: } a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

لنقارن $a + b$ و $2\sqrt{ab}$ بدراسة إشارة فرقهما:

$$(a + b) - 2\sqrt{ab} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} - 2\sqrt{ab} = \sqrt{a^2} - 2\sqrt{ab} + \sqrt{b^2}$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ (هذه قوة موجبة لأن أسها عدد زوجي)}$$

$$\text{بما أن } (a + b) - 2\sqrt{ab} \geq 0 \text{ فإن } a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

تمرين: قارن كل عددين مما يلي:

$$2\sqrt{3} - 4 \text{ و } \sqrt{3} - 5 \text{ ؛ } \frac{15}{14} \text{ و } \frac{13}{12} \text{ ؛ } \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \text{ و } \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$(2) \quad x \text{ عدد حقيقي موجب قطعاً. بين أن } x + \frac{1}{x} \geq 2$$

(3) a و b عددين حقيقيين موجبان .

$$\text{قارن بين } 4ab \text{ و } (a + b)^2$$

الطريقة الثانية: المقارنة باستعمال خصائص الترتيب:

II _ الترتيب والعمليات

1-الترتيب والمربع والجزر المربع:

قاعدة: a و b عددين حقيقيين موجبان:

$$a \leq b \text{ يعني } a^2 \leq b^2$$

$$a \leq b \text{ يعني } \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

مثال 1: لنقارن $2\sqrt{3}$ و $3\sqrt{2}$ (عددين موجبان)

$$\text{نقارن مربعيهما: } (3\sqrt{2})^2 = 3^2 \times \sqrt{2}^2 = 9 \times 2 = 18$$

$$\text{و } (2\sqrt{3})^2 = 2^2 \times \sqrt{3}^2 = 4 \times 3 = 12$$

$$\text{بما أن } 18 > 12 \text{ فإن } 3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$$

مثال 2: لنقارن $\sqrt{37}$ و $\sqrt{23}$ (عددين موجبان)

$$\text{بما أن } 37 > 23 \text{ فإن } \sqrt{37} > \sqrt{23}$$

III - التآطير :

1- تآطير مجموع عددين :

أ- إضافة (أو طرح) نفس العدد إلى تآطير:

a و b و m و c أعداد حقيقية:

$$a \leq m \leq b \text{ يعني } a + c \leq m + c \leq b + c$$

* مثال: x و y عدنان حقيقيان بحيث :

$$3 \leq x \leq 8 \text{ و } 5 \leq y + 7 \leq 2 \text{ أطر } x + 8 \text{ و } y$$

$$\text{لدينا } 3 \leq x \leq 8 \text{ إذن } 3 + 8 \leq x + 8 \leq 8 + 8$$

$$\text{و بالتالي: } 11 \leq x + 8 \leq 16$$

$$\text{لدينا } 5 \leq y + 7 \leq 2 \text{ إذن } 5 - 7 \leq y + 7 - 7 \leq 2 - 7$$

$$\text{و بالتالي } -2 \leq y \leq -4$$

ب - جمع تآطيرين طرفا بطرف:

a و b و m و n و c و d أعداد حقيقية:

$$a + c \leq m + n \leq b + d \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq m \leq b \\ c \leq n \leq d \end{cases}$$

* مثال x و y عدنان حقيقيان بحيث :

$$-5 \leq x \leq -3 \text{ و } 5 \leq y \leq 7 \text{ أطر } x + y$$

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq -3 \\ 5 \leq y \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 + 5 \leq x + y \leq -3 + 7 \\ 0 \leq x + y \leq 4 \end{cases} \text{ و بالتالي}$$

(3) - تآطير فرق عددين: a و b و m و n و c و d أعداد حقيقية:

$$a - d \leq m - n \leq b - c \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq m \leq b \\ c \leq n \leq d \end{cases}$$

* مثال x و y عدنان حقيقيان بحيث :

$$-5 \leq x \leq -3 \text{ و } 5 \leq y \leq 7 \text{ أطر } x - y$$

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq -3 \\ 5 \leq y \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 - 7 \leq x + y \leq -3 - 5 \\ -12 \leq x + y \leq -8 \end{cases} \text{ و بالتالي}$$

تمرين: x و y و z أعداد حقيقية بحيث :

$$-4 \leq z \leq 5 \text{ و } -5 \leq y \leq -2 \text{ و } 6 \leq x \leq 9$$

$$\text{أطر ما يلي: } x + 1 \text{ و } z - 2 \text{ و } x + y \text{ و } y + z$$

$$y - x \text{ و } z - y \text{ و } x + y - z \text{ و } y - x + 6$$

4- تآطير جداء عددين :

أ - ضرب (أو قسمة) تآطير في نفس العدد

(1) : الضرب في نفس العدد الموجب قطعاً: لا يتغير الترتيب

a و b و m و k أعداد حقيقية:

$$a \times k \leq m \times k \leq b \times k \Leftrightarrow (k > 0 \text{ و } a \leq m \leq b)$$

نتيجة: ضرب متفاوتتين طرفاً بطرف:

$$a \text{ و } b \text{ و } m \text{ و } n \text{ أعداد موجبة: } \begin{cases} a \leq b \\ m \leq n \end{cases} \Leftrightarrow a \times m \leq b \times n$$

مثال: لنقارن $21\sqrt{7}$ و $18\sqrt{5}$ (أعداد موجبة)

$$\text{لدينا } 21 > 18 \text{ و } \sqrt{7} > \sqrt{5} \text{ (لأن } 7 > 5) \text{ إذن } 21\sqrt{7} > 18\sqrt{5}$$

(4) - الترتيب والمقلوب :

a و b عدنان حقيقيان لهما نفس الإشارة وغير منعدمين.

$$a \leq b \text{ تعني أن } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

مثال: لنقارن $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{لدينا } 2 > \sqrt{3} \text{ (لأن } 2^2 > \sqrt{3}^2) \text{ إذن: } \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

تمرين: قارن كل عددين مما يلي:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} \text{ و } \frac{1}{\sqrt{2}-1} \text{ ؛ } \frac{1}{5\sqrt{2}} \text{ و } \frac{1}{2\sqrt{5}} \text{ ؛ } \frac{1}{\sqrt{21}+3} \text{ و } \frac{1}{2\sqrt{5}+3}$$

تمرين:

$$1- \text{ أنشر و بسط } (2 + \sqrt{7})^2 \text{ و } (3 + \sqrt{2})^2$$

$$2- \text{ قارن } 4\sqrt{7} \text{ و } 6\sqrt{2}$$

$$3- \text{ قارن } (2 + \sqrt{7})^2 \text{ و } (3 + \sqrt{2})^2$$

$$4- \text{ استنتج مقارنة } 2 + \sqrt{7} \text{ و } 3 + \sqrt{2}$$

تمرين:

$$\text{نعتبر العددين: } a = \frac{3}{\sqrt{11}-2} \text{ و } b = \frac{5\sqrt{11}+1}{7}$$

1- اجعل مقام العدد a عددا جذريا (أزل الجذر المربع من المقام)

$$2- \text{ بين أن: } b - a = \frac{2\sqrt{11}-5}{7}$$

$$3- \text{ قارن } 5 \text{ و } 2\sqrt{11}$$

$$4- \text{ استنتج مقارنة } a \text{ و } b.$$

تمرين :

$$(1) - \text{ قارن: } \sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ و } \sqrt{5} + 2$$

$$(2) - \text{ بين أن: } \sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$\text{و أن: } \sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$$

$$(3) - \text{ استنتج مقارنة العددين: } \sqrt{5} - 2 \text{ و } \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

تمرين: x قياس زاوية حادة:

$$\text{بين أن } (\sin(x) + \cos(x))^2 \geq 3\sin(x)\cos(x)$$

5- تأطير مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

a و b و m أعداد حقيقية غير منعدمة ولها نفس الإشارة:

$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{a} \Leftrightarrow a \leq m \leq b$$

* مثال x عدد حقيقي بحيث: $-5 \leq x \leq -3$ أطر $\frac{1}{x}$

$$-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{5} \Leftrightarrow -5 \leq x \leq -3$$

(6) - تأطير خارج عددين :

a و b عددين حقيقيين .

لتأطير الخارج $\frac{a}{b}$ يكفي أن نؤطر الجداء $a \times \frac{1}{b}$

* مثال x و y عددين حقيقيين بحيث :

$$-5 \leq x \leq -3 \text{ و } 5 \leq y \leq 7 \text{ أطر } \frac{y}{x}$$

أولا نؤطر $\frac{1}{x}$ (ثم نؤطر الجداء $y \times \frac{1}{x}$)

$$-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{5} \Leftrightarrow -5 \leq x \leq -3 \text{ لدينا}$$

لنؤطر الجداء $y \times \frac{1}{x}$ (لاحظ أن $\frac{1}{x}$ سالب)

$$\frac{-1}{3} \times 7 \leq \frac{1}{x} \times y \leq \frac{-1}{5} \times 5 \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{5} \\ 5 \leq y \leq 7 \end{array} \right.$$

تمرين:

x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :

$$2 \leq t \leq 5 \text{ و } -4 \leq z \leq -1 \text{ و } -5 \leq y \leq -2 \text{ و } 6 \leq x \leq 9$$

أطر ما يلي: $\frac{yz}{-2t+3x}$ و $\frac{x+t}{x-t}$ و $\frac{y}{t}$ و $\frac{z}{y}$ و $\frac{x}{t}$

تمرين:

علما أن: $1,7 \leq \sqrt{3} \leq 1,8$ و $2,6 \leq \sqrt{7} \leq 2,7$.

(1) - أوجد تأطيرا للعدد $\sqrt{21}$

(2) - أوجد تأطيرا للعدد $3 - 2\sqrt{21}$

(3) - أوجد تأطيرا للعدد $\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$

تمرين: b عدد حقيقي بحيث: $\frac{1}{4} < \frac{3}{-b+5} < \frac{1}{2}$

أوجد تأطيرا للعدد b.

لدينا $-7 \leq x \leq 1$ وبما أن $5 > 0$ (عدد موجب)

$$\text{فإن } -7 \times 5 \leq x \times 5 \leq 1 \times 5 \text{ أي } -35 \leq 5x \leq 5$$

(2) : الضرب في نفس العدد السالب قطعا: يتغير الترتيب

a و b و m و k أعداد حقيقية:

$$k \times b \leq k \times m \leq k \times a \Leftrightarrow (k < 0 \text{ و } a \leq m \leq b)$$

* مثال a عدد حقيقي بحيث: $3 \leq a \leq 8$ أطر $-4a$

لدينا $3 \leq a \leq 8$ وبما أن $-4 < 0$ (عدد موجب) فإن

$$-4 \times 8 \leq -4 \times a \leq -4 \times 3 \text{ أي } -32 \leq -4a \leq -12$$

ب- تأطير جداء عددين لهما نفس الإشارة

الأعداد موجبة: ضرب متفاوتتين طرفا بطرف دون تغيير الترتيب:

a و b و m و n و c و d أعداد حقيقية موجبة:

$$a \times c \leq m \times n \leq b \times d \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq m \leq b \\ c \leq n \leq d \end{cases}$$

* مثال x و y عددين حقيقيين بحيث :

$$5 \leq x \leq 6 \text{ و } 5 \leq y \leq 9 \text{ (أعداد موجبة) أطر } xy$$

$$5 \times 5 \leq x \times y \leq 6 \times 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq x \leq 6 \\ 5 \leq y \leq 9 \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$25 \leq xy \leq 54 \text{ وبالتالي}$$

الأعداد سالبة: ضرب متفاوتتين طرفا بطرف مع تغيير الترتيب:

a و b و m و n و c و d أعداد حقيقية سالبة:

$$a \times c \geq m \times n \geq b \times d \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq m \leq b \\ c \leq n \leq d \end{cases}$$

* مثال x و y عددين حقيقيين بحيث :

$$-3 \leq x \leq -1 \text{ و } -5 \leq y \leq -2 \text{ (أعداد سالبة) أطر } xy$$

$$-3 \times (-5) \geq x \times y \geq -1 \times (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq -1 \\ -5 \leq y \leq -2 \end{cases}$$

$$15 \geq xy \geq 2 \text{ وبالتالي}$$

ج- تأطير جداء عددين مختلفي الإشارة

* مثال: a و b عددين حقيقيين بحيث :

$$5 \leq a \leq 9 \text{ و } -6 \leq b \leq -2 \text{ (لاحظ b سالب), أطر } ab$$

$$-54 \leq b \times a \leq -10 \text{ إذن: } \begin{cases} -6 \leq b \leq -2 \\ 5 \leq a \leq 9 \end{cases}$$

تمرين:

x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :

$$2 \leq t \leq 5 \text{ و } -4 \leq z \leq -1 \text{ و } -5 \leq y \leq -2 \text{ و } 6 \leq x \leq 9$$

أطر ما يلي: $7x$ و $-2z$ و $-y$ و xt و yz

xy و zt و x^2 و y^2 و $7x + yz$ و $-2z - xt$