

حل تمارين الجذور المربعة

حل التمرين الأول:

$$A = -\sqrt{75} + 3\sqrt{48} - 2\sqrt{27}$$

لاحظ أن الأعداد داخل الجذر كلها مضاعفات للعدد 3

$$\begin{aligned} A &= -\sqrt{25 \times 3} + 3\sqrt{16 \times 3} - 2\sqrt{9 \times 3} \\ &= -\sqrt{25} \times \sqrt{3} + 3\sqrt{16} \times \sqrt{3} - 2\sqrt{9} \times \sqrt{3} \\ &= -5 \times \sqrt{3} + 3 \times 4 \times \sqrt{3} - 2 \times 3 \times \sqrt{3} \\ &= -5\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} \times \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(6 + 4\sqrt{2})(6 - 4\sqrt{2})} \\ &= \sqrt{6^2 - (4\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{36 - 16 \times 2} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$C = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2} - \sqrt{7}} - \frac{1}{5} \quad (\text{حذار من أن تحدد المقام بإدخال 5})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{7}) + \sqrt{7}(\sqrt{2} + \sqrt{7})}{(\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{2} - \sqrt{7})} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{2 - \sqrt{14} + \sqrt{14} + 7}{2 - 7} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{9}{-5} - \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$= -2 \quad D = 4\sqrt{20} - \sqrt{80} + 3\sqrt{45} - \sqrt{125} - \sqrt{49 \times 5}$$

لاحظ أن الأعداد داخل الجذر هي مضاعفات للعدد 5

$$\begin{aligned} D &= 4\sqrt{4 \times 5} - \sqrt{16 \times 5} + 3\sqrt{9 \times 5} - \sqrt{25 \times 5} - \sqrt{49 \times 5} \\ &= 4\sqrt{4} \sqrt{5} - \sqrt{16} \sqrt{5} + 3\sqrt{9} \sqrt{5} - \sqrt{25} \sqrt{5} - \sqrt{49} \sqrt{5} \\ &= 8\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 9\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 7\sqrt{5} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 25 \times 4 - 4} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 100 - 4} \\ &= \sqrt{121} \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$F = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{27}{16}} + \frac{1}{7}\sqrt{\frac{40}{9}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{4-2\sqrt{3}} + \frac{1}{4+2\sqrt{3}}\right)$$

$$= 2 \frac{4+2\sqrt{3} + 4-2\sqrt{3}}{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{16}{16-12}$$

$$= 4$$

$$I = (\sqrt{5} - 1)^{-1} + (\sqrt{5} + 1)^{-1}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{5} - 1)} + \frac{1}{(\sqrt{5} + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 1 + \sqrt{5} - 1}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{2\sqrt{5}}{5-1} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

حل التمرين الثاني:

$$J = \sqrt{\sqrt{7} - 1} \times \sqrt{\sqrt{7} + 1} \times \sqrt{6}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1)} \times \sqrt{6}$$

$$= \sqrt{7-1} \times \sqrt{6}$$

$$= \sqrt{6} \times \sqrt{6}$$

$$= 6$$

$$= \frac{4}{3} \frac{\sqrt{9 \times 3}}{\sqrt{16}} + \frac{1}{7} \sqrt{\frac{4 \times 10}{9}}$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{10}}{21}$$

$$= \frac{2\sqrt{10}}{21} - \sqrt{3}$$

$$G = \sqrt{9 - 2\sqrt{14}} - \sqrt{9 + 2\sqrt{14}}$$

لاحظ أن العددين $9 - 2\sqrt{14}$ و $9 + 2\sqrt{14}$ مترافقان إذن :
باستعمال الخاصية نجد :

$$G = \frac{-4\sqrt{14}}{\sqrt{9-2\sqrt{14}} + \sqrt{9+2\sqrt{14}}}$$

$$H = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} \times \frac{4-2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} \times \frac{4+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{16-12}{(4-2\sqrt{3})^2}} + \sqrt{\frac{16-12}{(4+2\sqrt{3})^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{4-2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{4}}{4+2\sqrt{3}}$$

$$A = \sqrt{\frac{5\sqrt{2} - 7}{5\sqrt{2} + 7}} = \sqrt{\frac{5\sqrt{2} - 7}{5\sqrt{2} + 7} \times \frac{5\sqrt{2} + 7}{5\sqrt{2} + 7}}$$

$$= \sqrt{\frac{(5\sqrt{2} - 7)(5\sqrt{2} + 7)}{(5\sqrt{2} + 7)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(5\sqrt{2})^2 - 7^2}{(5\sqrt{2} + 7)^2}} = \frac{\sqrt{50 - 49}}{5\sqrt{2} + 7}$$

$$A = \frac{1}{5\sqrt{2} + 7}$$

بنفس الطريقة نحسب B

$$B = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \times \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{9 - 4 \times 2}}{3 + 2\sqrt{2}}$$

$$B = \frac{1}{3 + \sqrt{2}}$$

2- نستنتج $A \times B$ و $\frac{A}{B}$

$$A \times B = \frac{1}{5\sqrt{2} + 7} + \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{(5\sqrt{2} + 7)(3 + 2\sqrt{2})}$$

$$K = \frac{1}{3}\sqrt{405} - \frac{2}{7}\sqrt{245}$$

لاحظ أن 245 و 405 من مضاعفات 5

$$K = \frac{1}{3}\sqrt{81 \times 5} - \frac{2}{7}\sqrt{49 \times 5}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{9} \times \sqrt{5} - \frac{2}{7}\sqrt{49} \sqrt{5}$$

$$= \sqrt{5} - 2\sqrt{5}$$

$$= -\sqrt{5}$$

$$L = \sqrt{9 \times 2 \times a^2 \times ab} + 3\sqrt{\frac{4 \times 2 \times a^2 \times ab}{9}} - \frac{2}{7}\sqrt{49 \times 2 \times a^2 \times ab}$$

$$= 3a\sqrt{2} \sqrt{ab} + 2a\sqrt{2} \sqrt{ab} - 2a\sqrt{2} \sqrt{ab}$$

$$= 3a\sqrt{2ab}$$

حل التمرين الثالث:

1- بسط

$$\frac{5\sqrt{2} + 7}{5\sqrt{2} + 7} = 1 \text{ عندما } \frac{5\sqrt{2} + 7}{5\sqrt{2} + 7} \text{ ثم نطبق المتطابقة الهامة}$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \text{ يتعلق الأمر بالجذر}$$

حل التمرين الرابع:

-1

لدينا

$$3\sqrt{7} > -3\sqrt{7}$$

$$12 + 3\sqrt{7} > 12 - 3\sqrt{7} > 0$$

$$\sqrt{12 + 3\sqrt{7}} > \sqrt{12 - 3\sqrt{7}}$$

$$\sqrt{12 + 3\sqrt{7}} - \sqrt{12 - 3\sqrt{7}} > 0$$

$$A > 0$$

إذن

يعني

إذن

إذن

بنفس الطريقة نبين $B < 0$

2- أحسب A^2 و B^2

$$A^2 = (\sqrt{12 + 3\sqrt{7}} - \sqrt{12 - 3\sqrt{7}})^2$$

$$= 12 + 3\sqrt{7} - 3\sqrt{(12 + 3\sqrt{7})(12 - 3\sqrt{7})} + 12 - 3\sqrt{7}$$

$$= 24 - 2\sqrt{144 - 63}$$

$$= 24 - 2\sqrt{81}$$

$$= 24 - 18$$

$$= 6$$

$$A = \sqrt{6}$$

إذن

$$B^2 = 7 - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{(7 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})} + 7 + 4\sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{15\sqrt{2} + 20 + 21 + 14\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{41 + 29\sqrt{2}}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{5\sqrt{2} + 7}}{\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}} = \frac{1}{5\sqrt{2} + 7} \times \frac{3 + 2\sqrt{2}}{1} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{5\sqrt{2} + 7}$$

هذه ليست كتابة مبسطة

إذن

$$\frac{A}{B} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{7 + 5\sqrt{2}} \times \frac{7 - 5\sqrt{2}}{7 - 5\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(3 + 2\sqrt{2})(7 - 5\sqrt{2})}{49 - (5\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{21 - 15\sqrt{2} + 14\sqrt{2} - 20}{-1}$$

$$= -(1 - \sqrt{2})$$

$$\frac{A}{B} = \sqrt{2} - 1$$

من جهة أخرى لدينا

$$CD = 4\sqrt{6}$$

إذن

$$\frac{CD}{D} = C = \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$C = 2\sqrt{2}$$

إذن

حل التمرين السادس:

1- نبين أن

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}} \quad (1)$$

$$A = \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}} = \sqrt{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y}} \quad \text{لدينا}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \quad \text{متطابقة هامة}$$

$$A = \sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} \\ = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

2- إذا عوضنا $x = (n+1)^2$ و $y = n^2$ في العلاقة (1)

$$= 14 - 2\sqrt{49 - 48}$$

$$= 14 - 2$$

$$= 12$$

$$B = 2\sqrt{3}$$

إذن

حل التمرين الخامس:

-1

يتعلق الأمر بالمتطابقة الهامة $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$CD = (\sqrt{5+2\sqrt{6}})^2 - (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^2$$

$$= 5 + 2\sqrt{6} - 5 + 2\sqrt{6}$$

$$= 4\sqrt{6}$$

$$D^2 = 5 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})} + 5 - 2\sqrt{6}$$

$$= 10 + 2\sqrt{5^2 - (2\sqrt{6})^2}$$

$$= 10 + 2$$

$$= 12$$

2- قيمة مبسطة للعدد C

$$\text{لدينا } D^2 = 12 \quad \text{إذن } D = \sqrt{12}$$

$$D = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(n+1)^2} + \sqrt{n^2} &= \sqrt{(n+1)^2 + n^2 + 2\sqrt{n^2(n+1)^2}} \\ &= \sqrt{n^2 + 2n + 1 + n^2 + 2n(n+1)} \\ &= \sqrt{2n^2 + 2n + 1 + 2n^2 + 2n} \\ &= \sqrt{4n^2 + 4n + 1} \\ &= \sqrt{(2n+1)^2} \\ &= 2n+1\end{aligned}$$