

Chapitre ⑦ : Introduction aux nombres réels

I. La racine carrée d'un nombre rationnel positif: pas à l'intérieur.

1) Définition:

Si a est un nombre rationnel positif, alors il existe un nombre réel x tel que $x^2 = a$.
Le nombre x s'appelle la racine carrée du nombre a et on écrit $x = \sqrt{a}$.

2) Exemples:

- * $x^2 = 11$ signifie que $x = \sqrt{11}$
- * $x^2 = \frac{1}{2}$ signifie que $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$
- * $x^2 = \frac{17}{5}$ signifie que $x = \sqrt{\frac{17}{5}}$

Remarques importantes:

- L'écriture $\sqrt{a}$ n'a pas de sens que si $a \geq 0$.
C'est à dire que ce qui est à l'intérieur de la racine doit être positif.

- Le nombre $\sqrt{7}$ se lit la racine carrée de 7, et n'est pas un nombre entier décimal, ni un nombre rationnel mais c'est un nombre réel.

3) Propriété principale:

a) Propriété:

a nombre décimal positif $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = a$

* Remarques:

- Si a est un nombre rationnel positif.
Alors les écritures $\sqrt{a^2}$ et $\sqrt{a^2}$ et $(\sqrt{a})^2$ sont égales $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$.
L'opposé du nombre $\sqrt{a}$ est $-\sqrt{a}$.
Le signe "-" est à l'extérieur de la racine,

- L'inverse du nombre $\sqrt{a}$ est $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

b) Exemples à apprendre:

Tableau de quelques carrés parfaits:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a ²	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

* Exemples à apprendre:

- * $\sqrt{0} = \sqrt{0^2} = 0$
- * $\sqrt{1} = \sqrt{1^2} = 1$
- * $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$
- * $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$
- * $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$
- * $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$
- * $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$
- * $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$
- * $\sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$
- * $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$
- * $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$
- * $\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11$
- * $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$
- * $\sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13$
- * $\sqrt{196} = \sqrt{14^2} = 14$
- * $\sqrt{225} = \sqrt{15^2} = 15$
- * $\sqrt{256} = \sqrt{16^2} = 16$

* Remarque:

La racine carrée est supprimée si le nombre est un carré parfait, sinon elle reste.

II. Applications:

1) Théorème de Pythagore:

ABC est un triangle rectangle en A tel que

AB = 4 cm et BC = 5 cm, Calculons AC

* Or ABC est un triangle rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore direct, on a: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$5^2 = 4^2 + AC^2$$

$$25 = 16 + AC^2$$

$$AC^2 = 25 - 16$$

$$AC^2 = 9$$

$$AC = 49$$

Alors

$$AC = 3 \text{ cm}$$

* Remarque: Si on a trouvé par exemple $BC = \sqrt{5}$

On aura besoin de la calculatrice pour déterminer la valeur approchée de $\sqrt{5}$

$$\text{donc } BC \approx 2,23 \text{ cm}$$

2) Résolution de l'équation $x^2 = a$ ($a \neq 0$)

* L'équation $x^2 = 3$ est équivalente à

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

$$x - \sqrt{3} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{3} = 0$$

$$x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

Donc l'équation admet deux solutions

$$\sqrt{3} \text{ et } -\sqrt{3}$$

* L'équation $x^2 = 49$ est équivalente à

$$x^2 - 49 = 0$$

$$x^2 - 7^2 = 0$$

$$(x - 7)(x + 7) = 0$$

$$x - 7 = 0 \text{ ou } x + 7 = 0$$

$$x = 7 \text{ ou } x = -7$$

Donc l'équation admet deux solutions

$$7 \text{ et } -7$$

* Remarques:

- Si $a > 0$ alors les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solutions

L'équation $x^2 = -5$ n'a pas de solutions car $-5 < 0$

3) Racine carrée et opérations :

$$A = \sqrt{25} + \sqrt{9}$$

$$= \sqrt{5^2} + \sqrt{3^2}$$

$$= 5 + 3$$

$$A = 8$$

$$B = \sqrt{\frac{81}{4}} - \sqrt{\frac{16}{4}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2} - \sqrt{4}$$

$$= \frac{9}{2} - \sqrt{2^2}$$

$$= \frac{9}{2} - 2$$

$$B = \frac{5}{2}$$

$$C = \frac{\sqrt{121}}{7} \times \sqrt{8^2}$$

$$= \frac{\sqrt{11^2}}{7} \times \sqrt{8^2}$$

$$= \frac{11}{7} \times 8 = 11 \times \frac{8}{7}$$

$$C = \frac{264}{7}$$