

Chapitre 6 : Vecteurs et Translation

I - Vecteur :

1) Les éléments d'un vecteur non nul :

a - Définition :

A et B deux points distincts du plan

Le couple de point (A, B) définit un vecteur qu'on note $\vec{AB}$, ses éléments sont :

- * Direction : est la droite (AB)
- * Sens : est le sens du demi-droite (AB) donc de A vers B

* Norme (Module) est la distance (longueur AB)

- Le point A est appelé origine de $\vec{AB}$
- Le point B est appelé extrémité de $\vec{AB}$

b - Figure géométrique :

On considère la figure suivante

$\vec{AB}$ est un vecteur



2) Vecteur nul :

* Définition : Le vecteur $\vec{AA}$ n'a pas de direction, n'a pas de sens et de norme 0, on l'appelle vecteur nul et on note :

$$\vec{AA} = \vec{0}$$

- Si $\vec{AB} = \vec{0}$ alors $A=B$ (càd les points A et B sont confondus)

3) Opposé d'un vecteur :

a - Définition :

A et B deux points du plan, on a :

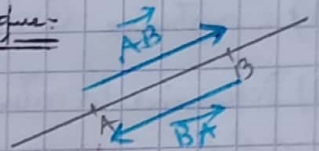
$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$$

Le vecteur $\vec{BA}$ s'appelle opposé du vecteur $\vec{AB}$

$$\text{et on écrit } \vec{AB} = -\vec{BA}$$

b - Figure géométrique :

$$\text{On a } \vec{AB} = -\vec{BA}$$



II - Égalité de deux vecteurs :

1) Définition :

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont :

- * même direction.
- * même sens
- * même norme.

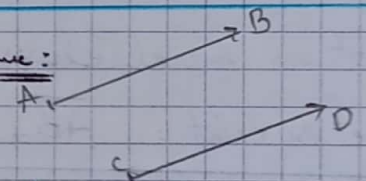
Autrement dit :

$$\vec{AB} = \vec{CD} \text{ si :}$$

- $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ont même direction càd (AB) // (CD)
- $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ont même sens
- $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ont même norme (longueur) càd $AB = CD$

* Figure géométrique :

$$\text{On a } \vec{AB} = \vec{CD}$$



2) Propriétés importantes :

1) $\vec{AB} = \vec{DC}$ signifie que ABCD est un parallélogramme

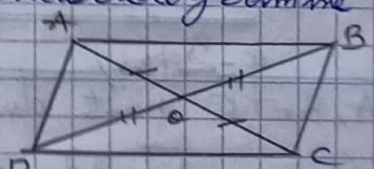
2) $\vec{AB} = \vec{DC}$ signifie que les segments [AC] et [BD] ont même milieu.

* Figure géométrique :

ABCD est un parallélogramme

$$\text{donc } \vec{AB} = \vec{DC}$$

$$\vec{AD} = \vec{BC}$$



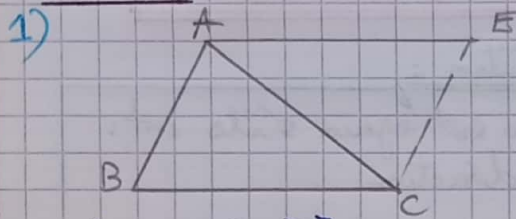
* Les diagonals [AC] et [BD] ont même milieu O

3) Application:

Soit ABC un triangle

- 1) Construire le point E tel que: $\vec{AE} = \vec{BC}$
- 2) Déterminer la nature du quadrilatère ABCE

* Solution:



2) On a $\vec{AE} = \vec{BC}$

donc ABCE est un parallélogramme.

III. Somme de deux Vecteurs:

1) Définition:

On dit que le vecteur $\vec{AC}$ est la somme des deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ si ABCD est un parallélogramme et on écrit: $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

* Figure géométrique:

ABCD est un parallélogramme

donc: $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

et on a aussi

$$\begin{cases} \vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BD} \\ \vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA} \\ \vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DB} \end{cases}$$

2) Relation de Chasles:

a- Propo:

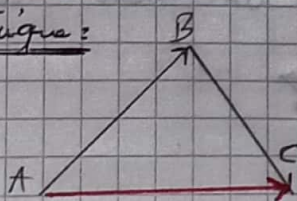
A, B et C points du plan

On a: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Cette égalité s'appelle relation de Chasles.

b- Figure géométrique:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



6- Exemples:

$$\begin{aligned} * \vec{EF} + \vec{GE} + \vec{FG} &= \vec{EF} + \vec{FG} + \vec{GE} \\ &= \vec{EG} + \vec{GE} \\ &= \vec{EE} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \vec{AB} - \vec{BD} + \vec{CA} - \vec{CB} &= \vec{CA} + \vec{AB} - \vec{CB} - \vec{BD} \\ &= \vec{CB} - \vec{CB} - \vec{BD} \\ &= \vec{0} - \vec{BD} \\ &= -\vec{BD} \end{aligned}$$

3) Exercice d'application:

ABCD parallélogramme

- 1) Construire les points M et N tel que:

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{AN} = \vec{AC} + \vec{AD}$$

- 2) Montrer que: $\vec{MN} = \vec{BD}$

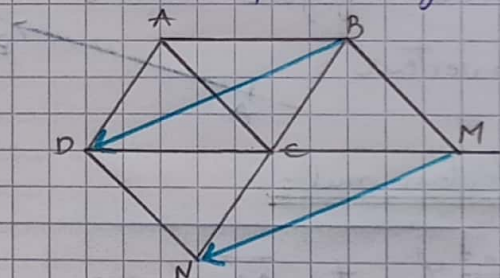
* Solution:

- 1) On a: $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$

donc ABMC est parallélogramme

et on a: $\vec{AN} = \vec{AC} + \vec{AD}$

donc ACND est parallélogramme



$$\begin{aligned} 2) \text{ On a } \vec{MN} &= \vec{MA} + \vec{AN} \\ &= -\vec{AM} + \vec{AN} \\ &= -\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{AC} + \vec{AD} \\ &= \vec{BA} + \vec{AD} \\ &= \vec{BD} \end{aligned}$$

On déduit que: $\vec{MN} = \vec{BD}$

4) Somme de plusieurs vecteurs:

a- Propo:

$\vec{AB}$ est vecteur, a un nombre entier naturel

On a: $\vec{AB} + \vec{AB} = 2\vec{AB}$

$$\vec{AB} + \vec{AB} + \vec{AB} = 3\vec{AB}$$

$$\underbrace{\vec{AB} + \vec{AB} + \dots + \vec{AB}}_{a \text{ fois}} = a \vec{AB}$$

b- Remarque:

Pour sommer trois vecteurs (ou plus), on additionne deux vecteurs parmi eux, et on ajoute à leur somme le troisième vecteur, cela en utilisant la translation pour appliquer la relation de Chasles.

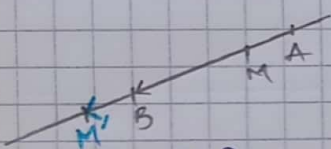
IV - La translation:

1) Activité:

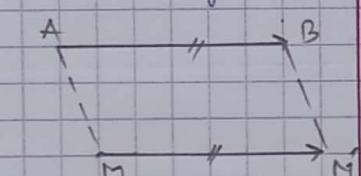
A, B et M trois points du plan
Construire dans chaque cas le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

Cas ①: points alignés

Cas ②: points non alignés



$$\begin{cases} M' \in (AB) \\ AB = MM' \end{cases}$$



ABMM' parallélogramme

Dans chacun des cas, on dit que le point M' est l'image du point M par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (ou bien qui transforme A en B)

2) Définition

$\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul
Le point M' est l'image du point M par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (ou bien qui transforme A en B)

Signifie que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

Signifie que : ABMM' parallélogramme.

3) Méthode de construction:

A, B deux points du plan, M point du plan
Le point M' est l'image du point M par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$

1) Si $M \in (AB)$

Alors : $M' \in (AB)$ tel que $AB = MM'$

2) Si $M \notin (AB)$

Alors M' est le quatrième sommet du parallélogramme ABMM' (le compas)

* Paragraphe supplémentaire:

Multiplication d'un vecteur par un nombre rationnel.

1) Définition:

$\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et k un nombre rationnel

On appelle le vecteur $k\overrightarrow{AB}$ produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre k et on écrit $k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$

Si M est un point de la droite (AB) tel que:

* Si $k > 0$ alors $AM = kAB$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ ont même sens (càd $M \in (AB)$)

* Si $k < 0$ alors $AM = -kAB$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ ont deux sens opposés (càd $M \in (BA)$)

2) Exemple

$$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$



$$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\begin{cases} - C \in (AB) \\ - \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ ont même sens} \\ - AC = 3AB \end{cases}$$

$$\begin{cases} - M \in (AB) \\ - \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ ont sens opposés} \\ - AM = \frac{3}{2}AB \end{cases}$$