

Chapitre ⑤ : Ordre et opérations

I - Comparaison de deux nombres rationnels

1) Règle:

Pour comparer deux nombres rationnels a et b , on détermine le signe de leur différence $a - b$

* $a - b > 0$ signifie que $a > b$

* $a - b \leq 0$ signifie que $a \leq b$

2) Exemples:

1) Comparer $\frac{2}{5}$ et 7

$$\text{On a: } \frac{2}{5} - 7 = \frac{2 - 35}{5} = \frac{-33}{5} < 0$$

$$\text{donc } \frac{2}{5} - 7 < 0 \text{ Alors } \frac{2}{5} < 7$$

2) Comparer $\frac{11}{3}$ et $\frac{7}{8}$

$$\text{On a } \frac{11}{3} - \frac{7}{8} = \frac{88 - 21}{24} = \frac{67}{24} > 0$$

$$\text{donc } \frac{11}{3} - \frac{7}{8} > 0 \text{ Alors } \frac{11}{3} > \frac{7}{8}$$

3) a et b deux nombres rationnels tel que

$$a - b = -5. \text{ Comparer } a \text{ et } b$$

$$\text{On a } a - b = -5 < 0$$

$$\text{donc } a - b < 0 \text{ Alors } a < b$$

3) Vocabulaire:

a - symbole $<$

Le symbole $a < b$ signifie que $\begin{cases} a < b \\ \text{et} \\ a \neq b \end{cases}$
se lit a est inférieure strictement à b

b - symbole $\leq$

Le symbole $a \leq b$ signifie que $\begin{cases} a < b \\ \text{ou} \\ a = b \end{cases}$
se lit a est inférieure ou égale à b

c - Inégalité:

a, b deux nombres rationnels

Toute égalité sous la forme $a < b$ ou $a > b$ s'appelle inégalité

a et b s'appellent côtés de l'inégalité

II - Ordre et opérations:

1) Ordre et addition:

a) Propo ①:

a, b et k des nombres rationnels

Si $a \leq b$ alors $a + k \leq b + k$

* Exemple:

a et b deux nombres rationnels tel que $a - 5 \leq b$

Montrons que $a - 3 \leq b + 2$

$$\text{Donc } a - 5 \leq b \text{ donc } a - 5 + 2 \leq b + 2$$

$$\text{Alors: } a - 3 \leq b + 2$$

b) Propo ②:

a, b, c et d des nombres rationnels

Si $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$ Alors $a + c \leq b + d$

* Exemple:

a et b deux nombres rationnels tel que:

$$a + 3 \leq -4 \text{ et } 2b - 1 \leq \frac{1}{2}$$

Montrons que $2b + a + 2 \leq -\frac{7}{2}$

$$\text{On a } \begin{cases} a + 3 \leq -4 \\ 2b - 1 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{donc } a + 3 + 2b - 1 \leq -4 + \frac{1}{2}$$

$$2b + a + 2 \leq \frac{-8 + 1}{2}$$

$$\text{Alors } 2b + a + 2 \leq -\frac{7}{2}$$

2) Ordre et multiplication:

a - Propo ③:

$a, b \in \mathbb{K}$ membres rationnels

$$1) \text{ si } \begin{cases} a \leq b \\ k \geq 0 \end{cases} \text{ donc } a \times k \leq b \times k$$

$$2) \text{ si } \begin{cases} a \leq b \\ k \leq 0 \end{cases} \text{ donc } a \times k \geq b \times k$$

b - Exemple:

a et b deux nombres rationnels telque

$$a \leq \frac{1}{2} \text{ et } b \leq -\frac{3}{2}$$

deduire $2a$ et $-6b$

$$* \text{ On a } \begin{cases} a \leq \frac{1}{2} \\ 2 > 0 \end{cases} \text{ donc } 2 \times a \leq 2 \times \frac{1}{2} \text{ donc } \boxed{2a \leq 1}$$

$$* \text{ On a } \begin{cases} b \leq -\frac{3}{2} \\ -6 < 0 \end{cases} \text{ donc } -6 \times b \geq -6 \times -\frac{3}{2} \text{ donc } \boxed{-6b \geq 9}$$

III - Encadrement:

1) Définition:

a, b et x des nombres rationnels

Chaque des écritures $a \leq x \leq b$ et $a \leq x \leq b$

S'appelle un encadrement du nombre x

* Remarque:

* L'écriture $a \leq x \leq b$ se lit x est compris entre a et b

* L'écriture $a < x < b$ se lit x est strictement compris entre a et b

2) Encadrement et approximation:

* Exemple: Considérons le nombre $\frac{13}{7}$

$$\text{On a } \begin{array}{r|l} 13 & 7 \\ 60 & 1,85 \\ 40 & \\ 5 & \end{array}$$

1) La valeur approché du nombre $\frac{13}{7}$ à 0,01 par défaut est 1,85

* La valeur approché du nombre $\frac{13}{7}$ à 0,01 par excès est 1,86

donc l'écriture $1,85 \leq \frac{13}{7} < 1,86$ est un encadrement du nombre $\frac{13}{7}$

2) La valeur approché du nombre $\frac{13}{7}$ à 0,01 par défaut est 1,86

* La valeur approché du nombre $\frac{13}{7}$ à 0,01 par excès est 1,85

* L'écriture $1,86 \leq \frac{13}{7} < 1,85$ est un encadrement du nombre $\frac{13}{7}$

3) Encadrement et opérations

a - Encadrement d'une somme

* Propo ④:

Soient tous les nombres rationnels

$$\text{si } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \text{ donc } a+c \leq x+y \leq b+d$$

* Exemple:

x et y deux nombres rationnels telque:

$$2 \leq x \leq 5 \text{ et } -3 \leq y \leq -1$$

Encadrer $x+y$

$$\text{On a } \begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq y \leq -1 \end{cases} \text{ donc } 2+(-3) \leq x+y \leq 5+(-1)$$

$$\text{Alors: } -1 \leq x+y \leq 4$$

b) Encadrement d'une différence:

* Propo ⑤:

Soient tous les nombres rationnels.

$$\text{si } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \text{ donc } a-d \leq x-y \leq b-c$$

* Remarque importante:

$$\text{On a: } a-b = a+(-b)$$

donc pour encadrer $a-b$, on encadre d'abord (b) après on applique la

propo ④ (Somme)

Exposé: si $a \leq x \leq b$ alors

$$-b \leq -x \leq -a$$

* Exemple: x et y deux nombres rationnels

telque: $3 \leq x \leq 8$ et $-4 \leq y \leq 2$

Encadrez $x - y$

On a: $-4 \leq y \leq 2$ donc $-2 \leq -y \leq 4$

On a) $3 \leq x \leq 8$ donc

$2 \leq -y \leq 4$ $3 + (-2) \leq x + (-y) \leq 8 + 4$

donc $1 \leq x - y \leq 12$

c) Encadrement d'un produit

* Propo 6:

Soient tous les nombres rationnels telque

$a \leq x \leq b$

* Si $k > 0$ alors: $ka \leq kx \leq kb$

* Si $k < 0$ alors: $kb \leq kx \leq ka$

* Exemple

x est un nombre rationnel telque:

$-3 \leq x \leq 4$

Encadrez $2x$ et $-5x$

* On a $-3 \leq x \leq 4$ et $2 > 0$

donc $2 \times (-3) \leq 2x \leq 2 \times 4$

Alors $-6 \leq 2x \leq 8$

* On a $-3 \leq x \leq 4$ et $-5 < 0$

donc $-5 \times 4 \leq -5x \leq -5 \times (-3)$

Alors $-20 \leq -5x \leq 15$

4) Exercice d'application:

a et b deux nombres rationnels telque:

$1 \leq a \leq \frac{5}{2}$ et $-4 \leq b \leq -\frac{3}{2}$

Encadrez $a+b$ et $a-b$ et $-4a$ et $8b$

$3a+2$ et $-2b-\frac{3}{4}$

* Encadrement $a+b$:

On a) $1 \leq a \leq \frac{5}{2}$

$-4 \leq b \leq -\frac{3}{2}$

donc $1 + (-4) \leq a+b \leq \frac{5}{2} + (-\frac{3}{2})$

Alors $-3 \leq a+b \leq 1$

* Encadrement $a-b$:

On a $-4 \leq b \leq -\frac{3}{2}$ donc $\frac{3}{2} \leq -b \leq 4$

et on a: $1 \leq a \leq \frac{5}{2}$

donc $1 + \frac{3}{2} \leq a + (-b) \leq \frac{5}{2} + 4$

Alors: $\frac{5}{2} \leq a-b \leq \frac{13}{2}$

* Encadrement $-4a$:

On a $1 \leq a \leq \frac{5}{2}$ donc $-4 \times \frac{5}{2} \leq -4a \leq -4 \times 1$

donc $-10 \leq -4a \leq -4$

* Encadrement $8b$:

On a $-4 \leq b \leq -\frac{3}{2}$ donc $8 \times (-4) \leq 8b \leq 8 \times (-\frac{3}{2})$

Alors: $-32 \leq 8b \leq -12$

* Encadrement $3a+2$

On a $1 \leq a \leq \frac{5}{2}$

donc $3 \times 1 \leq 3a \leq 3 \times \frac{5}{2}$

$3 \leq 3a \leq \frac{15}{2}$

$3+2 \leq 3a+2 \leq \frac{15}{2}+2$

Alors: $5 \leq 3a+2 \leq \frac{19}{2}$

* Encadrement $-2b-\frac{3}{4}$

On a: $-4 \leq b \leq -\frac{3}{2}$

donc $-2 \times (-\frac{3}{2}) \leq -2b \leq -2 \times (-4)$

$3 \leq -2b \leq 8$

$3 - \frac{3}{4} \leq -2b - \frac{3}{4} \leq 8 - \frac{3}{4}$

$\frac{12-3}{4} \leq -2b - \frac{3}{4} \leq \frac{32-3}{4}$

Alors: $\frac{9}{4} \leq -2b - \frac{3}{4} \leq \frac{29}{4}$

IV - Inéquations:

1) Définition:

Toute inégalité qui s'écrit sous la forme
 $ax+b < 0$ ou $ax+b \leq 0$ ou $ax+b > 0$
 ou $ax+b \geq 0$ s'appelle une inéquation
 du premier degré à une inconnue x

2) Résolution des inéquations :

a. Techniques des résolutions :

* La résolution d'une inéquation se base sur les mêmes techniques de résolution des équations :

- On regroupe les inconnus dans un côté et les termes connus dans l'autre côté, à condition de changer le signe du terme déplacé.

- Il faut faire attention au signe du nombre a dans l'inéquation $ax = b$:

$ax \leq b$

$\downarrow$
 $a > 0$
 alors $x \leq \frac{b}{a}$
 On change pas le symbole

$\downarrow$
 $a < 0$
 alors $x \geq \frac{b}{a}$
 On change le symbole.

b. Les cas de résolution :

1°) Si on a trouvé par exemple $x > a$ (ou $x \leq a$), on dit que tous les nombres rationnels supérieurs strictement à a (ou inférieurs ou égale à a) sont solutions de cette inéquation.

2°) Si on a trouvé une expression impossible par exemple $0 > 3$ ($0 > 3$), on dit que cette inéquation n'admet pas de solution.

3°) Si on a trouvé une expression vraie par exemple $0 > -8$, on dit tout nombre rationnel est une solution de cette inéquation.

c. Exemples :

1°) L'inéquation $2x + 1 \leq 5$ est respectivement équivalente à

$$\begin{aligned} 2x &\leq 5 - 1 \\ 2x &\leq 4 \\ x &\leq \frac{4}{2} \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

donc tous les nombres rationnels inférieurs ou égale à 2 sont solutions de cette équation.

2°) L'inéquation $3(x+1) > 0$ est respectivement équivalente à

$$\begin{aligned} 6x - 10 - 3x - 3 &> 0 \\ 3x - 13 &> 0 \\ 3x &> 13 \\ x &> \frac{13}{3} \end{aligned}$$

donc tous les nombres rationnels supérieurs ou égale à $\frac{13}{3}$ sont solutions de cette inéquation.

3°) L'inéquation $\frac{x+1}{2} - \frac{x-3}{3} > \frac{3x+5}{6}$

est respectivement équivalente à

$$\begin{aligned} \frac{3(x+1) - 2(x-3)}{6} &> \frac{3x+5}{6} \\ 3x+3-2x+6 &> 3x+5 \\ x-3x &> 5-9 \end{aligned}$$

$$-2x > -4$$

$$x < \frac{-4}{-2}$$

$$x < 2$$

donc tous les nombres rationnels inférieurs strictement à 2 sont solutions de cette inéquation.

4°) L'inéquation $2(3x-1) - 4x > 2x+1$

est respectivement équivalente à

$$6x-2-4x > 2x+1$$

$$2x-2x > 1+2$$

$$0x > 3$$

Ce qui est impossible.

donc cette inéquation n'admet pas de solution.

5°) L'inéquation $3x+5-2(x+2) > x-7$

est respectivement équivalente à

$$3x+5-2x-4 > x-7$$

$$x-x > -7-1$$

$$0x > -8$$

Donc tout nombre rationnel est une solution de cette inéquation.