

Chapitre 4 : Théorème de Pythagore et cosinus d'un angle droit.

I - Théorème de Pythagore :

1) La propriété directe :

a) propo :

Si un triangle est rectangle, alors la carré longueur de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des longueurs des deux côtés de l'angle droit.

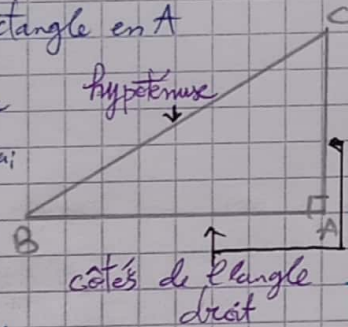
Autrement dit, si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b) Figure géométrique :

ABC est un triangle rectangle en A

alors d'après le théorème de Pythagore directe on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$



* Remarque importante :

Dans un triangle rectangle, la longueur de l'hypoténuse est toujours supérieure aux longueurs des côtés de l'angle droit.

* ABC est un triangle rectangle en A, donc :

$$AB < BC \text{ et } AC < BC$$

c) Exemple :

ABC est un triangle rectangle en A tel que

$AB = 3 \text{ cm}$ et $AC = 4 \text{ cm}$, calculer BC

* On a ABC est un triangle rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore

$$\text{on a : } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$= 3^2 + 4^2$$

$$= 9 + 16$$

$$BC^2 = 25$$

$$\text{donc } BC = \sqrt{25}$$

$$\text{Alors } BC = 5 \text{ cm}$$

1) Remarques :

* Le théorème de Pythagore nous permet de calculer un côté d'un triangle rectangle si on sait les deux autres côtés.

* Dans la dernière étape du calcul, nous avons besoin de la racine carrée pour supprimer le carré, cette racine est supprimée elle-même si le nombre est un carré parfait, sinon elle reste, mais on peut utiliser la calculatrice pour trouver la valeur approchée.

* On appelle carré parfait le carré d'un nombre entier positif, voici la liste des dix premiers carrés parfaits.

Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Carré	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

2) Exercice d'application :

EFG est un triangle rectangle en E tel que $EF = 8$ et $FG = 10$ Calculer EG

Solution : On a EFG est un triangle rectangle en E, alors d'après le théorème de Pythagore

$$\text{On a : } FG^2 = EF^2 + EG^2$$

$$10^2 = 8^2 + EG^2$$

$$EG^2 = 10^2 - 8^2$$

$$EG^2 = 100 - 64$$

$$EG^2 = 36$$

$$EG = \sqrt{36}$$

$$\text{Alors on a : } EG = 6$$

* Remarque : Conséquence de la propo

Si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle.

II - Cosinus d'un angle aigu

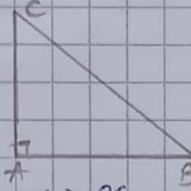
1) Définition :

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est le quotient de son côté adjacent par la longueur de l'hypoténuse.

* Vocabulaire :

ABC est un triangle rectangle en A

- $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont les deux angles aigus
- $[AB]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$ et il est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$
- $[AC]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$ et il est le côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$
- $[BC]$ est l'hypoténuse.



$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{Longueur du côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

Le cosinus est le premier rapport trigonométrique

* Autrement dit,

ABC est un triangle rectangle en A

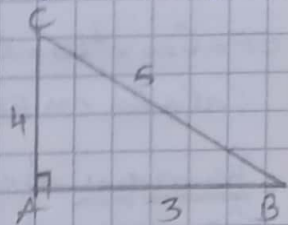
$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} \quad \text{et} \quad \cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}$$

2) Remarques importantes :

- 1) x est mesure d'un angle aigu donc $0 < \cos x < 1$
Le cosinus de n'importe quel angle aigu est toujours compris entre 0 et 1
- 2) Le rapport trigonométrique $\cos$ n'a pas d'unité.
- 3) pour calculer $\cos 34^\circ$ par exemple, on utilise la touche $\cos$ dans la calculatrice
- 4) On peut écrire $\cos \widehat{ABC} = \cos \widehat{B}$ si on n'a pas ambiguïté
- 5) ABC triangle rectangle en A, donc les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont complémentaires c-à-d $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$

3) Exemples :

* Exemple ① : ABC est un triangle rectangle en A tel que
Calculer $\cos \widehat{ABC}$ et $\cos \widehat{ACB}$

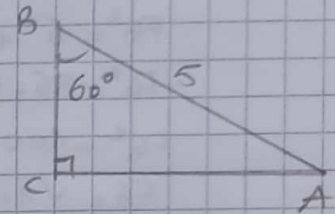


$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6 < 1$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8 < 1$$

* Exemple ②

ABC est un triangle rectangle en C tel que
 $AB = 5 \text{ cm}$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$



Calculer BC et AC

ABC est un triangle rectangle en C, donc :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{BC}{AB} \quad \text{donc} \quad \cos 60^\circ = \frac{BC}{5}$$

$$\text{Alors} \quad \frac{1}{2} = \frac{BC}{5} \Rightarrow BC = \frac{5}{2}$$

$$BC = 2,5 \text{ cm}$$

* De plus on a $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$
donc $60^\circ + \widehat{ACB} = 90^\circ$
 $\widehat{ACB} = 90^\circ - 60^\circ$
donc $\widehat{ACB} = 30^\circ$

$$\text{On a} \quad \cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{5}$$

$$AC = 5 \times \cos 30^\circ \quad \text{avec} \quad \cos 30^\circ \approx 0,86$$

$$AC \approx 5 \times 0,86$$

$$AC \approx 4,3 \text{ cm} \quad \text{valeur approchée}$$

4) Exercice d'application:

EFG est un triangle rectangle en E tel que
 $EF = 6 \text{ cm}$ et $EG = 8 \text{ cm}$

Calculer $\cos \widehat{EFG}$ et $\cos \widehat{EGF}$

* Remarque: pour calculer les cos de $\widehat{EFG}$ et $\widehat{EGF}$, on aura besoin de l'hypoténuse FG c'est pourquoi on utilise le théorème de Pythagore pour calculer FG.

Solution: Le triangle EFG est rectangle en E, donc d'après le théorème de Pythagore

$$\text{On a: } FG^2 = EF^2 + EG^2$$

$$FG^2 = 6^2 + 8^2$$

$$FG^2 = 36 + 64$$

$$FG^2 = 100$$

$$FG = \sqrt{100}$$

$$\text{Alors } FG = 10 \text{ cm}$$

$$\text{On a: } \cos \widehat{EFG} = \frac{EF}{FG} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos \widehat{EGF} = \frac{EG}{FG} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0,8$$