

## ÉQUATIONS ET PROBLÈMES

### 1) Égalité et opérations

- a) Égalité et addition -soustraction : Si  $a = b$ , alors  $a + c = b + c$  et  $a - c = b - c$

Lorsqu'on ajoute ou lorsqu'on retranche un même nombre aux deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.

Exemple : si  $x + 5 = 3$  alors  $x + 5 - 5 = 3 - 5$ . **Donc  $x = -2$ .**

- b) Égalité et multiplication : Si  $a = b$ , alors  $a \times c = b \times c$

Si on multiplie par un même nombre les deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.

Exemple : Si  $\frac{x}{3} = \frac{1}{6}$  alors  $\frac{x}{3} \times 3 = \frac{1}{6} \times 3$ . **Donc  $x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .**

- c) Égalité et division : Si  $a = b$ , alors  $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ , si  $a \neq 0$ .

Si on divise par un même nombre non nul les deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.

Exemple : Si  $5x = -4$  alors  $\frac{5x}{5} = \frac{-4}{5}$ . **Donc  $x = \frac{-4}{5}$ .**

### 2) Équation : définitions

- a) Définition 1 : Une équation est une égalité dans laquelle figure un ou plusieurs nombres inconnus représentés par une ou plusieurs lettres.

Exemple :  $2x + 7 = 10x + 35$  est une équation d'inconnue  $x$ .  
 $2x + 7$  est le 1<sup>er</sup> membre de l'équation.  
 $10x + 35$  est le 2<sup>ème</sup> membre de l'équation.

- b) Définition 2 : Une solution d'une équation à une inconnue  $x$  est une valeur de  $x$  vérifiant l'égalité des 2 membres.

Exemple : Le nombre  $x = \frac{-4}{5}$  est une solution de l'équation  $5x = -4$ , car  $5 \times \frac{-4}{5} = -4$ .

- c) Définition 3 : Résoudre une équation à une inconnue  $x$ , c'est trouver toutes les solutions de cette équation.

Exemple :  $3x - 4 = 2$ .

Alors  $3x - 4 + 4 = 2 + 4$ . Donc  $3x = 6$ . D'où  $\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$ . **Donc  $x = 2$ .**

### 3) Équations de base

a) Équation :  $x + a = b$

Exemples :  $x - 8 = -15$

$$x + a = b \Leftrightarrow x = b - a$$

$$x + 5 = 3$$

$$4 - x = 5$$

b) Équation :  $a x = b$  avec  $a \neq 0$

Exemples :  $3 x = 5$

$$a x = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$$

$$-5 x = -15$$

c) Équation :  $\frac{a}{b} x = \frac{c}{d}$

$$\frac{a}{b} x = \frac{c}{d} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{a}$$

Exemples :  $\frac{2}{5} x = \frac{7}{15}$

$$\frac{-5}{9} x = \frac{20}{-12}$$

$$x = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{15} \times \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{\frac{20}{-12}}{\frac{-5}{9}} = \frac{20}{-12} \times \frac{9}{-5}$$

$$x = \frac{7 \times 5}{3 \times 5 \times 2} = \frac{7}{6}$$

$$x = \frac{4 \times 5 \times 3 \times 3}{-3 \times 4 \times -5} = \frac{3}{1} = 3$$

### 4) Équations : $a x + b = c x + d$

On regroupe les termes avec les  $x$  d'un côté du signe = et les termes sans  $x$  de l'autre côté, en utilisant les propriétés du 1<sup>er</sup> paragraphe.

$$a x + b = c x + d \Leftrightarrow a x - c x = d - b$$

$$\Leftrightarrow (a - c) x = d - b$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{d - b}{a - c} \quad \text{si } a \neq c$$

Exemples :

$$-7 x + 8 = -6$$

$$3 x + 8 = 4 - 5 x$$

$$\frac{5}{4} x - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + 2 x$$

$$-7 x = -6 - 8$$

$$3 x + 5 x = 4 - 8$$

$$\frac{5}{4} x - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + 2 x$$

$$x = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$x = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{4} x - \frac{8}{4} x = \frac{5}{6} + \frac{4}{6}$$

$$-\frac{3}{4} x = \frac{9}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{9}{6}}{-\frac{3}{4}}$$

$$x = \frac{9}{6} \times -\frac{4}{3} = -\frac{36}{18} = -2$$

## 5) Résolution de problèmes

- On explique le choix de l'inconnue, ce que représente l'inconnue dans le problème.
- On met le problème en équation, en traduisant chaque phrase à l'aide des signes mathématiques.
- On résout l'équation.
- On conclut en rédigeant la réponse à la question posée dans le problème.

Exemple 1 :

Un père de 40 ans a 3 enfants âgés respectivement de 8 ans, 5 ans et 2 ans.  
Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal au double de la somme des âges des enfants ?

- Soit  $x$  le nombre d'années où l'âge du père sera le double de la somme des âges des enfants.
- Dans  $x$  années, le père aura  $40 + x$ , les enfants auront respectivement  $8 + x$ ,  $5 + x$  et  $2 + x$ .  
Donc, dans  $x$  années,  $40 + x = 2 \times (8 + x + 5 + x + 2 + x)$ .  
**D'où l'équation  $40 + x = 2 \times (15 + 3x)$ .**
- On résout cette équation.  $40 + x = 2 \times (15 + 3x) \Leftrightarrow 40 + x = 2 \times 15 + 2 \times 3x \Leftrightarrow 40 + x = 30 + 6x$ .  
 $40 + x = 2 \times (15 + 3x) \Leftrightarrow 40 - 30 = 6x - x \Leftrightarrow 10 = 5x$ .

$$\text{Donc } \frac{10}{5} = x = 2.$$

- Conclusion : Dans 2 ans, le père aura 42 ans et les enfants auront respectivement 10, 7 et 4 ans.  
**Dans 2 ans, l'âge du père sera égal au double de la somme des âges des enfants.**
- Vérification : la somme des âges des enfants sera  $10 + 7 + 4 = 21$  ans et  $42 = 2 \times 21$ .

Exemple 2 :

Pierre dépense les  $\frac{2}{5}$  de ses économies, puis les  $\frac{2}{3}$  du reste.

Il dépense maintenant le  $\frac{1}{4}$  de ce qui lui reste. A la fin, il lui reste 9 euros.

Quel était le montant de ses économies ?

- Soit  $x$  le montant des économies de Pierre.

- Pierre dépense  $\frac{2}{5}x$ . Il lui reste  $x - \frac{2}{5}x = \frac{5}{5}x - \frac{2}{5}x = \frac{3}{5}x$ .

Il dépense maintenant  $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}x = \frac{2}{5}x$ . Il a dépensé au total  $\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x = \frac{4}{5}x$ .

Il lui reste  $x - \frac{4}{5}x = \frac{5}{5}x - \frac{4}{5}x = \frac{1}{5}x$ . Il dépense maintenant  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}x = \frac{1}{20}x$ .

Au total, il a dépensé  $\frac{4}{5}x + \frac{1}{20}x = \frac{16}{20}x + \frac{1}{20}x = \frac{17}{20}x$ . Il lui reste 9 €.

**D'où l'équation :  $x = \frac{17}{20}x + 9$ .**

- On résout cette équation.

$$x = \frac{17}{20}x + 9 \Leftrightarrow x - \frac{17}{20}x = 9 \Leftrightarrow \frac{20}{20}x - \frac{17}{20}x = 9 \Leftrightarrow \frac{3}{20}x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{\frac{3}{20}} = 9 \times \frac{20}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3 \times 3 \times 20}{3}.$$

D'où  $x = 60$ .

- Conclusion : **Pierre avait 60 euros d'économie.**