

Chapitre ②: Triangle rectangle et cercle

I. milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle :

1) Propriété directe :

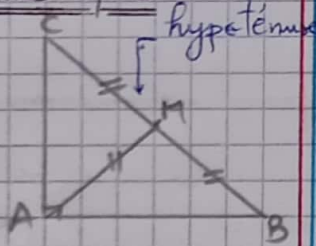
a) Propo ① :

Si un triangle est rectangle, alors le milieu de son hypoténuse est équidistant aux sommets de ce triangle.

D'une autre façon : Si ABC est un triangle rectangle en A et M milieu de [BC], alors : $MA = MB = MC$

b) Figure géométrique

ABC triangle rectangle en A, M milieu de l'hypoténuse [BC]
donc $MA = MB = MC$



c) Exercice d'application :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = 8\text{ cm}$ et E le milieu de [BC]

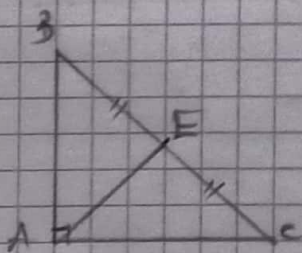
1° Tracer la figure

2° Montrer que AEC est triangle isocèle

3° Déduire la longueur EA

Solution :

1°



2° On a le triangle ABC est rectangle en A et E est le milieu de son hypoténuse [BC]

donc d'après la propo ①, on a :

$$EA = EB = EC$$

$$\text{Donc } EA = EC$$

D'où : AEC est un triangle isocèle en A

3° On sait que E est le milieu de [BC]

$$\text{donc } EC = \frac{BC}{2}$$

$$\text{càd } EC = \frac{8}{2} = 4\text{ cm}$$

$$\text{Or } EA = EC \text{ donc } \boxed{EA = 4\text{ cm}}$$

2) Propriété réciproque :

a) Propo ② :

Si dans un triangle le milieu de l'un de ses côtés est équidistant à ses sommets, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé à ce côté

D'une autre façon : Si ABC est un triangle et M milieu de [BC] tel que $MA = MB = MC$, alors ABC est un triangle rectangle en A.

b) Exercice d'application :

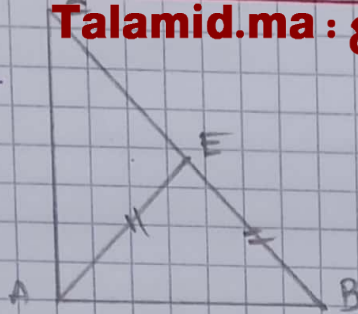
Soit AEB un triangle isocèle en E et soit C le symétrique de A par rapport à E

1° Tracer la figure

2° Montrer que le triangle ABC est rectangle.

* Solution:

1°/



2°/ On a le triangle AEB est un triangle isocèle en E, alors $EA = EB$ ①
et on a C est le symétrique de B par rapport au point E
donc E est milieu du côté (AC)
alors: $EA = EC$ ②

de ① et ②, on déduit que $EA = EB = EC$

Dans le triangle ABC: on a $\begin{cases} E \text{ milieu de } [AC] \\ EA = EB = EC \end{cases}$
donc d'après la propo ②, le triangle ABC est rectangle en B.

II - Triangle rectangle et cercle:

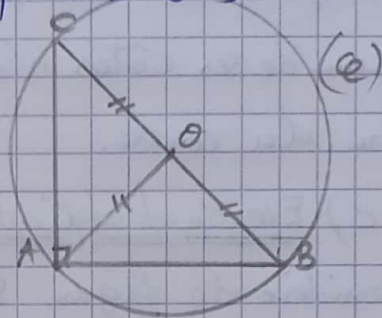
1°/ Propriété directe:

a) Propo ③:

Si un triangle est rectangle, alors le milieu de son hypoténuse est le centre de son cercle circonscrit de rayon la moitié de l'hypoténuse.
D'une autre façon: Si ABC est un triangle rectangle en A et O milieu de son hypoténuse [BC], alors O est le centre du cercle circonscrit à ce triangle de rayon $\frac{BC}{2}$

b- Figure géométrique:

ABC triangle rectangle en A et O milieu de l'hypoténuse (BC)



Le cercle (c) circonscrit au triangle ABC est de centre O et de rayon $\frac{BC}{2}$

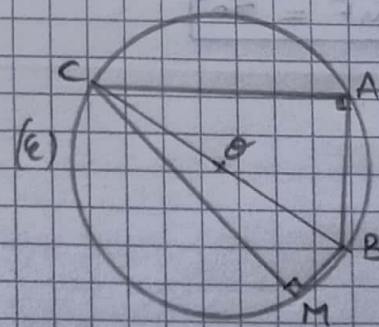
2°/ Propriété réciproque:

a) Propo ④:

Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé à ce côté.
D'une autre façon: Si ABC est un triangle inscrit dans un cercle de diamètre [BC], alors ce triangle est rectangle en A.

b) Figure géométrique:

(c) cercle de centre O

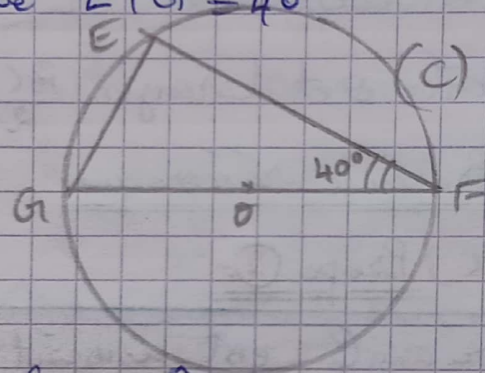


* Le triangle ABC est rectangle en A car [BC] est un diamètre du cercle (c)

- * Le triangle BCM est rectangle en M car (BC) est diamètre du cercle (c)
- * Le triangle AMC n'est pas rectangle car aucun de ses côtés n'est pas diamètre du cercle.

c) Exercice d'application:

On considère la figure suivante
telque $\widehat{EFG} = 40^\circ$



Calculer $\widehat{EGF}$

* Solution: On a le triangle EFG est inscrit dans le cercle (c) de diamètre le côté (GF)

donc d'après la propo 4 le triangle EFG est rectangle en E

$$\text{d'où } \widehat{EGF} + \widehat{EFG} = 90^\circ$$

$$\widehat{EGF} + 40^\circ = 90^\circ$$

$$\widehat{EGF} = 90^\circ - 40^\circ$$

$$\text{Donc } \boxed{\widehat{EGF} = 50^\circ}$$