

4ème - Calcul littéral, équations

COMPÉTENCES ÉVALUÉES DANS CE CHAPITRE :

(T : compétences transversales, N : activités numériques, G : activités géométriques, F : gestion de données et fonctions)

Intitulé des compétences		Eval.1	Eval.2	Eval.3
T1	Connaître le vocabulaire, les définitions et les propriétés du cours	○ ○	○ ○	○ ○
N22	Remplacer la lettre par un nombre dans une expression littérale ; tester une égalité	○ ○	○ ○	○ ○
N23	Développer un produit à l'aide de la règle de distributivité simple	○ ○	○ ○	○ ○
N24	Factoriser, réduire une somme à l'aide de la règle de distributivité simple	○ ○	○ ○	○ ○
N25	Appliquer la règle de suppression des parenthèses précédées d'un signe + ou d'un signe –.	○ ○	○ ○	○ ○
N26	Développer un produit en utilisant la règle de distributivité double	○ ○	○ ○	○ ○
N27	Résoudre une équation du premier degré à une inconnue	○ ○	○ ○	○ ○
N28	Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue	○ ○	○ ○	○ ○
		Taux de réussite : %		
		Note du chapitre : /20		
		Moyenne de la classe : /20		

* : cette compétence fait partie du **socle commun**.

Légende du tableau de compétences :

- Deux points verts : *Je sais très bien faire*
 Un point vert : *Je sais bien faire, mais il reste quelques erreurs*
 Un point rouge : *Je ne sais pas bien faire, il y a trop d'erreurs*
 Deux points rouges : *Je sais pas faire du tout*

12.1 Remplacer la lettre par un nombre dans une expression littérale ; tester une égalité

Une **expression littérale** est une expression dans laquelle un ou plusieurs nombres sont représentés par des lettres. Une même lettre désigne toujours un même nombre dans une expression littérale donnée.

Par exemple :

$E = 4x^2 - x + 3$ est une expression littérale dans laquelle un nombre est représenté par la lettre x

On peut **calculer la valeur de cette expression** lorsque la lettre prend une valeur donnée.

Par exemple, pour $x = -2$, on a $E = 4 \times (-2)^2 - (-2) + 3 = 4 \times 4 + 2 + 3 = 16 + 2 + 3 = 21$

Tester si l'égalité $2x + 4 = 13 - x$ est vraie pour $x = 3$

- **D'une part**, le premier membre vaut $2 \times 3 + 4 = 6 + 4 = 10$,
- **d'autre part** le second membre vaut $13 - 3 = 10$

Comme les deux membres ont la même valeur, l'égalité est vérifiée.

12.2 Développer un produit grâce à la règle de distributivité simple

Définition

Développer un produit signifie l'écrire sous la forme d'une somme ou d'une différence.

Pour ce faire, on dispose d'un premier moyen :

Développer grâce à la règle de distributivité simple

Soient k , a et b trois nombres relatifs. On a :

$$k(a + b) = k \times a + k \times b \quad \text{autrement dit, en simplifiant l'écriture,} \quad k(a + b) = ka + kb$$

Exemples :

- $2(3 + 5x) = 2 \times 3 + 2 \times 5x = 6 + 10x$
- $5y(3 - 2y) = 5y(3 + (-2y)) = 5y \times 3 + 5y \times (-2y) = 15y - 10y^2$

12.3 Factoriser, réduire une expression

Définition

Factoriser une somme ou une différence signifie l'écrire sous la forme d'un produit.

C'est donc l'opération "inverse" du développement :

Factoriser grâce à la règle de distributivité simple

Soient k , a et b trois nombres relatifs ; on a

$$ka + kb = k(a + b) \quad \text{autrement dit, en simplifiant l'écriture,} \quad \boxed{ka + kb = k(a + b)}$$

Exemples :

$$\begin{aligned} \bullet 5x + 5y &= 5(x + y) & \bullet 3b - 5b &= 3b + (-5)b = (3 - 5)b = -2b & \bullet 3x^2 - x &= x \times 3x - x \times 1 = x(3x - 1) \end{aligned}$$

Définition

Réduire une expression littérale, cela consiste à effectuer la somme algébrique des termes "de même nature", afin d'écrire cette expression avec le moins de termes possibles.

Exemples :

$$\bullet 5x - 2 + 3x + 7 = 5x + (-2) + 3x + 7 = 5x + 3x + (-2) + 7 = 8x + 5$$

On a regroupé d'une part les "**termes en x** ", d'autre part les "**termes constants**"

$$\bullet 5x^2 + x - 7x^2 + 5x - 11 = 5x^2 + x + (-7x^2) + 5x + (-11) = 5x^2 + (-7x^2) + x + 5x + (-11) = -2x^2 + 6x - 11$$

On a regroupé entre eux les "**termes en x^2** ", les "**termes en x** ", et enfin les "**termes constants**"

12.4 Règles de suppression des parenthèses précédées d'un signe +, d'un signe -

Parenthèses précédées d'un signe +

Pour **ajouter** une somme algébrique écrite entre parenthèses, il suffit d'additionner chaque terme de cette somme algébrique :

$$\text{Pour tous nombres relatifs } a, b, c \text{ et } d, \text{ on a } \quad a + (b + c - d) = a + b + c - d$$

Exemples :

$$\bullet 2x + (3 + 5x) = 2x + 3 + 5x = 7x + 3 \quad \bullet 5 + (9x - 1) = 5 + 9x - 1 = 9x + 4$$

Parentèses précédées d'un signe -

Pour **soustraire** une somme algébrique écrite entre parenthèses, il suffit d'additionner les opposés de chacun des termes de cette somme algébrique :

$$\text{Pour tous nombres relatifs } a, b, c \text{ et } d, \text{ on a } a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

Exemples : • $2x - (3 + 5x) = 2x - 3 - 5x = -3x - 3$ • $5 - (9x - 1) = 5 - 9x + 1 = -9x + 6$

12.5 Double distributivité

Règle de double distributivité

Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs ; on a :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemples :

- $(x + 2)(x + 5) = x \times x + x \times 5 + 2 \times x + 2 \times 5 = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$
- $(3x + 2)(x - 5) = (3x + 2)(x + (-5)) = 3x \times x + 3x \times (-5) + 2 \times x + 2 \times (-5) = 3x^2 + (-15x) + 2x + (-10) = 3x^2 - 13x - 10$

12.6 Résoudre une équation du premier degré

Définitions

- Une **équation** est une égalité dans laquelle un nombre - appelé **inconnue** de l'équation - est représenté par une lettre.
- S'il en existe, la (ou les) valeur(s) de l'inconnue pour la(les)quelle(s) l'égalité est vraie sont appelées **solutions** de l'équation.
- **Résoudre** une équation consiste à trouver **toutes** ses solutions

Exemple :

$2x + 3 = 11$ est une équation, d'inconnue x .

On dit qu'elle est du **premier degré**, car la plus grande puissance de x est 1.

- $x = 2$ **n'est pas** une solution de cette équation ; en effet, on a $2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7 \neq 11$
- $x = 4$ **est** une solution de cette équation ; en effet, on a $2 \times 4 + 3 = 8 + 3 = 11$

Comment résoudre une équation ?

On s'appuie sur deux règles de calcul sur les égalités :

Règles de calcul sur les égalités

Soient a , b et c trois nombres relatifs.

On ne change pas une égalité (*c'est-à-dire qu'une égalité vraie reste vraie*) lorsque :

- on **ajoute** (ou on **soustrait**) un **même nombre** à ses deux membres :

$$\text{Si } a = b \text{ alors } a + c = b + c \text{ et } a - c = b - c$$

- on **multiplie** (ou on **divise**) par un **même nombre** chacun de ses deux membres :

$$\text{Si } a = b \text{ alors } a \times c = b \times c \text{ et } \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

Application à la résolution d'une équation : Pour résoudre une équation de ce type, on doit **isoler** x dans un des membres de l'équation.

	$x + 7 = -2x - 2$	
+2x	}	+2x
	$x + 7 + 2x = -2x - 2 + 2x$	
	$3x + 7 = -2$	
-7	}	-7
	$3x + 7 - 7 = -2 - 7$	
	$3x = -9$	
÷3	}	÷3
	$\frac{3x}{3} = \frac{-9}{3}$	
	$x = -3$	

La solution de cette équation est -3

Vérification : $-3 + 7 = 4$ et $-2 \times (-3) - 2 = 4$

① On commence par **ajouter $2x$ aux deux membres de l'équation**, pour éliminer les x du second membre.

② Ensuite on **soustrait 7 aux deux membres de l'équation**, pour éliminer les termes constants du premier membre.

③ On termine en **divisant par 3 les deux membres de l'équation** pour finir d'isoler l'inconnue.

12.7 Mettre en équation et résoudre un problème

Toutes les résolutions de problèmes par mise en équation se déroulent selon un schéma en 4 étapes, qu'il faut impérativement respecter ; en voici un exemple :

Énoncé : Deux enfants, Adrien et Béatrice, jouent aux billes. Adrien dit : "J'ai seize billes de moins que toi..." ; ce à quoi Béatrice répond : "J'en ai trois fois plus que toi!". Combien de billes possède Adrien ?

Résolution :

Etape 1 : choix de l'inconnue	On note x le nombre de billes que possède Adrien.
Etape 2 : mise en équation du problème	<p>La phrase "J'ai seize billes de moins que toi..." se traduit par "Béatrice possède $x + 16$ billes".</p> <p>La phrase "J'en ai trois fois plus que toi!" se traduit par "Béatrice possède $3x$ billes".</p> <p>On a donc l'équation $x + 16 = 3x$</p>
Etape 3 : résolution de l'équation	$\begin{array}{rcl} x + 16 & = & 3x \\ -3x & \left[\begin{array}{l} x + 16 - 3x & = & 3x - 3x \end{array} \right] & -3x \\ & & -2x + 16 & = & 0 \\ -16 & \left[\begin{array}{l} -2x + 16 - 16 & = & 0 - 16 \end{array} \right] & -16 \\ & & -2x & = & -16 \\ \div (-2) & \left[\begin{array}{l} \frac{-2x}{-2} & = & \frac{-16}{-2} \end{array} \right] & \div (-2) \\ & & x & = & 8 \end{array}$ <p>La solution de cette équation est 8</p> <p>Vérification : $8 + 16 = 24$ et $3 \times 8 = 24$</p>
Etape 4 : Interprétation et conclusion	<p><i>NB : Le résultat est un nombre entier positif, ce qui est cohérent avec l'énoncé</i></p> <p>Pierre possède 8 billes (et Béatrice 24).</p>