

TRIANGLES ET PARALLELES

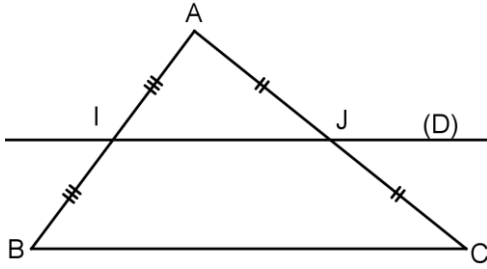
I. THEOREMES DES MILIEUX.

a. Premier théorème des milieux :

Dans un triangle,
SI une droite passe par les milieux de deux côtés,
ALORS
cette droite est parallèle au 3^{ème} côté.

Remarque : On appelle souvent cette droite la « droite des milieux ».

hypothèses



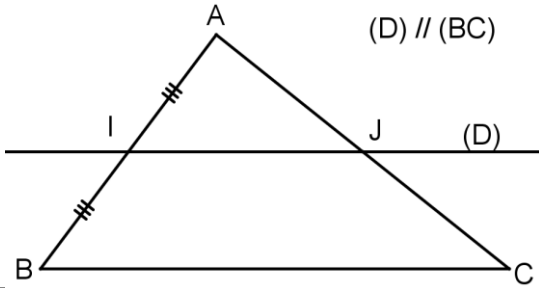
conclusion

Si I milieu de [AB] et J milieu de [AC]
alors (D) // (BC)

b. Second théorème des milieux :

Dans un triangle,
SI une droite : - est parallèle à un côté
- passe par le milieu d'un second côté
ALORS
elle passe par le milieu du 3^{ème} côté.

hypothèses



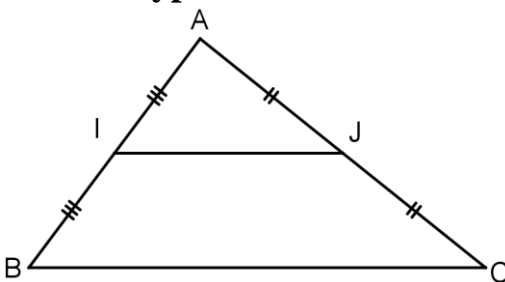
conclusion

Si I milieu de [AB] et (D) // (BC)
Alors J est le milieu de [AC].

c. Troisième théorème des milieux :

Dans un triangle,
SI un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés,
ALORS
Sa longueur est égale à la moitié de celle du 3^{ème} côté.

hypothèses



Conclusion

Si I milieu de [AB] et J milieu de [AC]
alors $IJ = \frac{1}{2} \times BC$

II. METHODE DE RESOLUTION : LE PRODUIT EN CROIX :

Nous aurons besoin d'une technique appelée le produit en croix pour résoudre des équations du style :

$$\frac{x}{3} = \frac{5}{6}.$$

« les produits des diagonales sont égaux », on commence par la diagonale contenant la variable (l'inconnue) :

$$\rightarrow \text{On obtient } 6 \times x = 5 \times 3 \quad \text{puis} \quad \frac{6 \times x}{6} = \frac{5 \times 3}{6} \quad \text{soit} \quad x = \frac{5}{2}.$$

Exemples : Résoudre les équations :

a) $\frac{7x}{5} = \frac{7}{10}$

$$7x \times 10 = 7 \times 5$$

$$70x = 35$$

$$\frac{70x}{70} = \frac{35}{70}$$

$$x = \frac{35 \times 1}{35 \times 2} = \frac{1}{2}$$

b) $\frac{3}{x} = \frac{6}{17}$

$$x \times 6 = 17 \times 3$$

$$6x = 51$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{51}{6}$$

$$x = \frac{17 \times 3}{2 \times 3} = \frac{17}{2}$$

c) $\frac{4}{5} = \frac{2}{x}$

$$x \times 4 = 5 \times 2$$

$$4x = 10$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{10}{4}$$

$$x = \frac{2 \times 5}{2 \times 2} = \frac{5}{2}$$

d) $\frac{9}{4} = \frac{x}{3}$

$$x \times 4 = 9 \times 3$$

$$4x = 27$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{27}{4}$$

$$x = \frac{27}{4}$$

e) $\frac{3}{3+x} = \frac{5}{8}$

$$5 \times 3 + x = 3 \times 8$$

$$15 + 5x = 24$$

$$15 + 5x - 15 = 24 - 15$$

$$5x = 9$$

$$x = \frac{9}{5}$$

III. « PETIT » THEOREME DE THALES :

PROPRIETE :

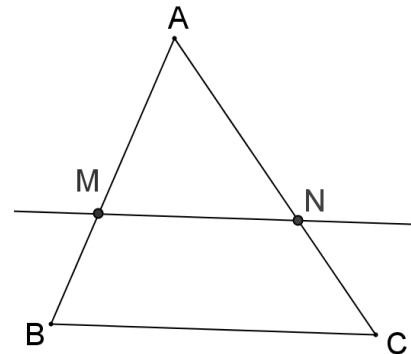
Dans un triangle ABC

Si :

- M est un point de [AB]
- N est un point de [AC]
- (MN) est parallèle à (BC)

ALORS : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

(les longueurs des côtés sont proportionnelles)



Remarque :

Le second théorème des milieux n'est qu'un cas particulier de ce théorème, pour $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$

Exemple :

On considère le triangle DEF tel que DE = 4 cm, DF = 5 cm, EF = 6 cm.

M est le point de [DE] tel que DM = 3cm.

La parallèle à (EF) passant par M coupe [DF] en N.

Calculer DN.

Dans le triangle DEF,

On sait que :

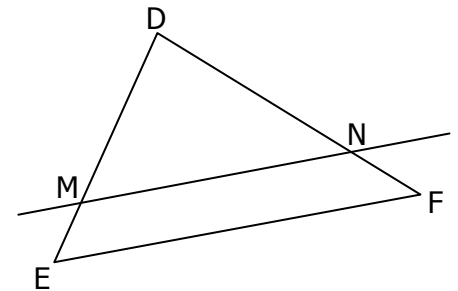
- $M \in [DE]$,
- $N \in [DF]$,
- $(MN) \parallel (EF)$,

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{DM}{DE} = \frac{DN}{DF} = \frac{MN}{EF},$$

soit :

$$\frac{3}{4} = \frac{DN}{5} = \frac{MN}{6},$$



TRIANGLES ET PARALLELES

Produit en croix :

$$DN \times 4 = 5 \times 3$$

d'où :

$$DN \times 4 \times \frac{1}{4} = 15 \times \frac{1}{4}$$

donc :

$$DN = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ cm}$$

IV. AGRANDISSEMENT ET REDUCTION :

Définition :

Si l'on multiplie par un nombre k supérieur à 1 toutes les longueurs d'une figure F , on obtient une figure F' qui est un **agrandissement** de la figure F .

Le nombre k est appelé le **facteur d'agrandissement**.

Si ce nombre k est compris entre 0 et 1, on obtient une **réduction** de la figure F .

Le nombre k est appelé le **facteur de réduction**.

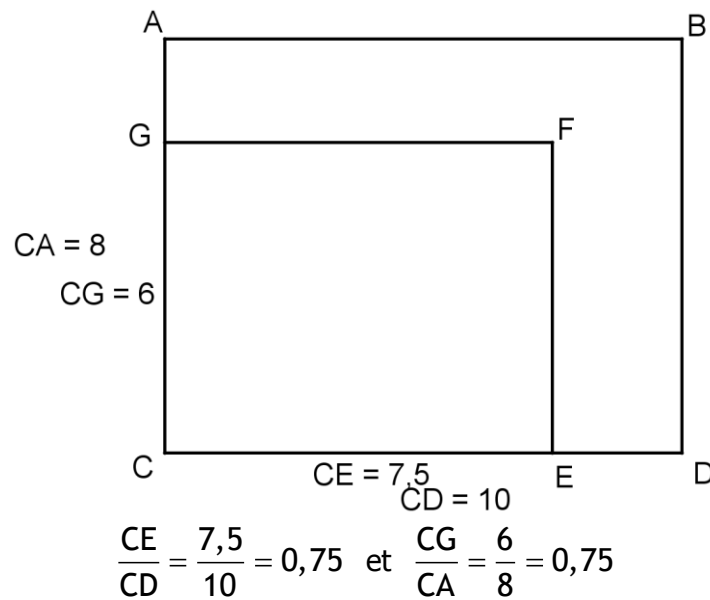
Il y a proportionnalité entre les longueurs correspondantes des deux figures.

Propriété :

Dans un agrandissement ou une réduction d'une figure :

- les mesures d'angles sont conservées,
- le parallélisme est conservé.

Exemple :



Cas particulier pour le triangle :

La configuration de Thalès abordée traduit une situation d'agrandissement/ réduction d'un triangle.

Ainsi :

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$