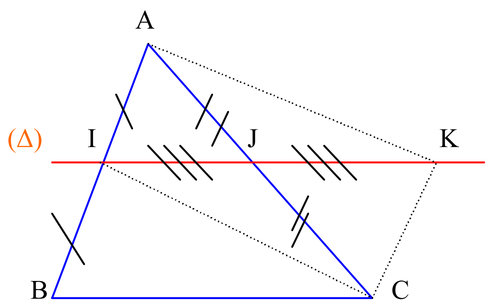
TRIANGLES : MILIEUX ET PARALLÈLES

1) Triangles et milieux

a) Théorème des milieux :
Dans un triangle ABC, la droite passant par les milieux I et J des côtés [AB] et [AC], est parallèle au 3ème côté [BC].

De plus : $\boxed{IJ = \frac{1}{2} BC}$

Démonstration :



K est le symétrique de I par rapport à la droite (Δ). Donc [AC] et [IK] ont le même milieu. Donc AKCI est un parallélogramme. Donc (KC) et (AI) sont parallèles.
De plus KC = AI = IB.
Donc (KC) et (IB) sont parallèles et KC = IB.
Donc KIBC est un parallélogramme.
Donc (IJ) et (BC) sont parallèles.
De plus $IJ = \frac{1}{2} IK = \frac{1}{2} BC$

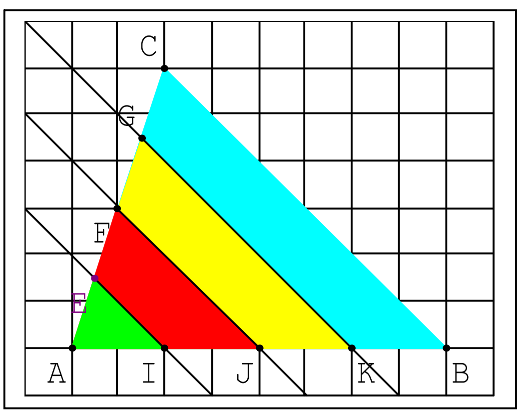
b) Théorème réciproque :

Dans un triangle ABC, la droite passant par le milieu I de [AB], et qui est parallèle à [BC], coupe le 3ème côté [AC] en son milieu J.

Démonstration : (éventuelle).

2) Triangles et parallèles

Activité préparatoire :

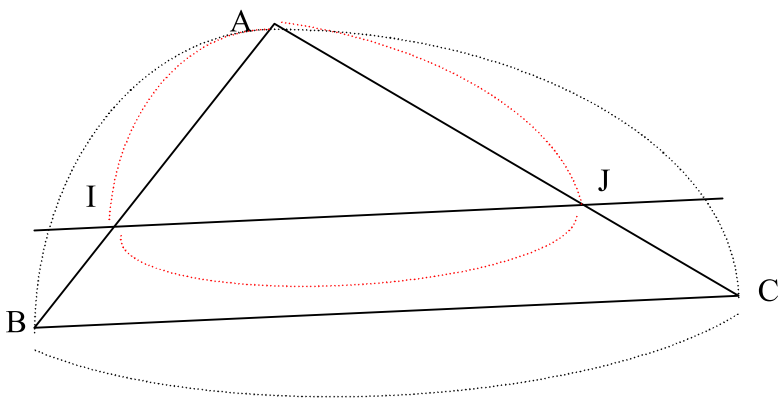


Les droites (EI), (JF)et (KG) sont parallèles à (BC).
AI = IJ = JK = KB.

1. Comparer $\frac{AJ}{AB}$ et $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{JF}{BC}$.
2. Comparer $\frac{AI}{AJ}$ et $\frac{AE}{AF}$ et $\frac{IE}{FJ}$.
3. Comparer $\frac{AI}{AB}$ et $\frac{AE}{AC}$; et $\frac{IE}{BC}$?
4. Comparer $\frac{AI}{AK}$ et $\frac{AE}{AG}$; et $\frac{IE}{KG}$?
5. Comparer $\frac{AK}{AB}$ et $\frac{AG}{AC}$; et $\frac{KG}{BC}$?

b) Théorème de Thalès :

Dans un triangle ABC, si I est un point du segment [AB] et si J est un point du segment [AC], et si les droites (IJ) et (BC) sont parallèles, alors on a : $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}$.



Donc le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité.

Longueurs des côtés du triangle ABC	AB	AC	BC
Longueurs des côtés du triangle AIJ	AI	AJ	IJ

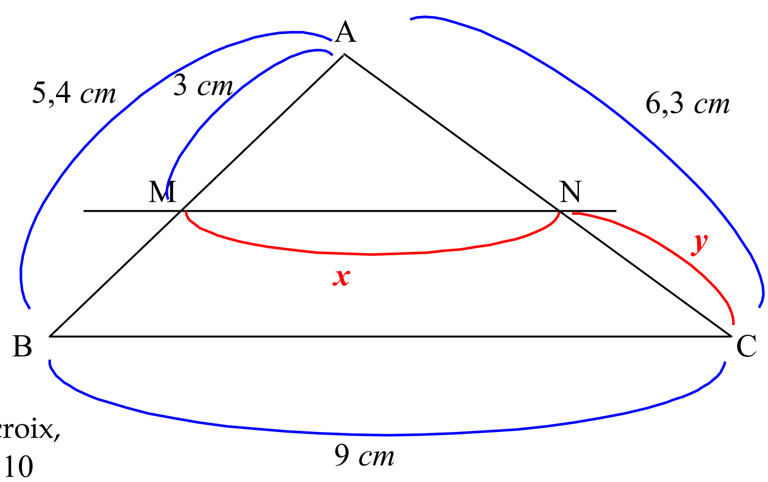
c) *Exemple* :

ABC est un triangle tel que : AB = 5,4 ; AC = 6,3 ; BC = 9. M est le point de [AB] tel que : AM = 3. La parallèle à (BC) coupe [AC] en N. Calculer MN et NC. (l'unité est le *cm*)

M est sur le segment [AB],
N est sur le segment [AC],
(MN) // (BC).
D'après le théorème de Thalès,

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Donc $\frac{3}{5,4} = \frac{AN}{6,3} = \frac{x}{9}$.



On utilise la règle des produits en croix,

3 x 9 = 5,4 x x. D'où $x = \frac{27}{5,4} = \frac{2,7 \times 10}{2,7 \times 2}$.

Donc x = 5 *cm*.

De même, 3 x 6,3 = 5,4 x AN. Donc $AN = \frac{3 \times 6,3}{5,4} = \frac{3 \times 63}{54} = \frac{3 \times 9 \times 7}{2 \times 3 \times 9} = \frac{7}{2}$. Donc AN = 3,5 *cm*.

Donc y = 6,3 – 3,5 = 2,8 *cm*.

3) Agrandissement et réduction

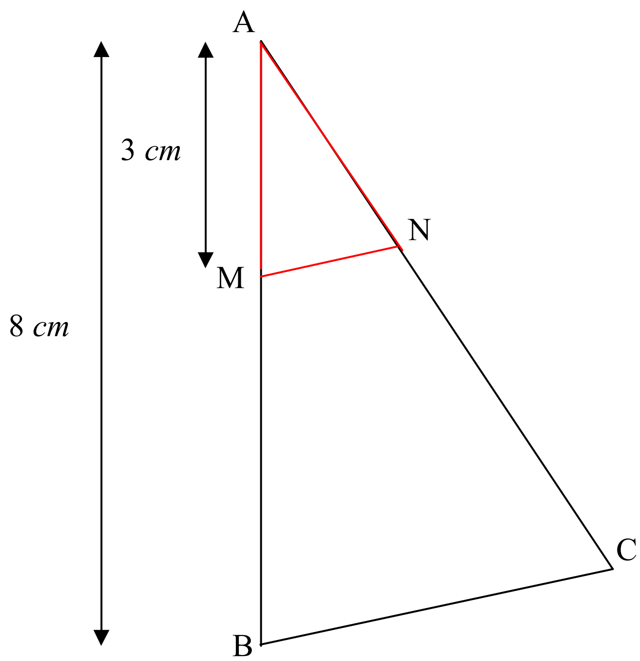
a) Définition : Une figure $\mathscr{F}'$ est un agrandissement ou une réduction d'une figure $\mathscr{F}$ si les longueurs de la figure $\mathscr{F}'$ sont proportionnelles aux longueurs de la figure $\mathscr{F}$.

Le coefficient de proportionnalité k de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{F}'$ s'appelle le coefficient d'agrandissement ou de réduction.

Si $k < 1$, on dit que $\mathscr{F}'$ est une réduction de $\mathscr{F}$.
Si $k > 1$, on dit que $\mathscr{F}'$ est un agrandissement de $\mathscr{F}$.

b) Propriété : Dans une réduction ou un agrandissement, les mesures des angles sont conservées.
Dans une réduction ou un agrandissement, le parallélisme est conservé.

c) *Exemple* : Dans la figure ci-dessous, M ∈ [AB], N ∈ [AC] et (MN) // (BC).



D'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Comme $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{8} < 1$,

le $\boxed{\textbf{triangle AMN est une réduction du triangle ABC de coefficient } k = \frac{3}{8}}$.