

I. SIMPLIFICATION D'ECRITURE FRACTIONNAIRE.

Propriété :

Le quotient de deux nombres ne change pas si l'on multiplie ou on divise le numérateur ET le dénominateur par un même nombre.

$$\text{Soit } a, b, c, \text{ trois nombres tels que } b \neq 0, c \neq 0: \frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} \quad \text{et} \quad \frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

Exemples :

$$\frac{63}{56} = \frac{\boxed{7} \times 9}{\boxed{7} \times 8} = \frac{9}{8}$$

$$\frac{-2,7}{4,5} = \frac{-2,7 \times \boxed{10}}{4,5 \times \boxed{10}} = \frac{-27}{45} = \frac{-\boxed{9} \times 3}{\boxed{9} \times 5} = \frac{-3}{5}$$

II. ADDITION ET SOUSTRACTION.

a. Si les dénominateurs sont identiques, on n'ajoute que les numérateurs :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{5} + \frac{7}{5} & B &= \frac{-9}{4} - \frac{3}{4} \\ A &= \frac{2+7}{5} & B &= \frac{-9-3}{4} \\ A &= \frac{9}{5} & B &= \frac{-12}{4} \\ & & B &= -3 \end{aligned}$$

b. Si un dénominateur est un multiple de l'autre, on transforme l'une des deux fractions pour obtenir le même dénominateur :

$$\begin{aligned} C &= \frac{5}{2} - \frac{7}{8} & D &= \frac{5}{2} - \frac{-2}{6} \\ C &= \frac{5 \times 4}{2 \times 4} - \frac{7}{8} & D &= \frac{5 \times 3}{2 \times 3} - \frac{-2}{6} \\ C &= \frac{20}{8} - \frac{7}{8} & D &= \frac{15}{6} - \frac{-2}{6} \\ C &= \frac{20-7}{8} & D &= \frac{15-(-2)}{6} \\ C &= \frac{13}{8} & D &= \frac{15+2}{6} \\ & & D &= \frac{17}{6} \end{aligned}$$

c. Dans tous les autres cas, on transforme les deux fractions pour obtenir le même dénominateur (on cherche un dénominateur commun, le plus petit possible) :

$$D = \frac{5}{4} + \frac{2}{3}$$

→ multiples de 4 : 4 ; 8 ; 12 ; 16

→ multiples de 3 : 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 → 12 est le plus petit multiple commun de 4 et 3.

$$D = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} + \frac{2 \times 4}{3 \times 4}$$

$$D = \frac{15}{12} + \frac{8}{12}$$

$$D = \frac{15+8}{12}$$

$$D = \frac{23}{12}$$

Exemple très détaillé : Calculer $\frac{-7}{9} + \frac{5}{6}$

1) On cherche un multiple commun aux dénominateurs 9 et 6 si possible plus petit que $9 \times 6 = 54$.

→ Les premiers multiples de 9 non nuls sont : 9, 18, 27 ...

→ Les premiers multiples de 6 non nuls sont : 6, 12, 18, 24 ...

→ On constate que 18 est un multiple commun à 9 et à 6.

2) On cherche le nombre égal à $\frac{-7}{9}$ et le nombre égal à $\frac{5}{6}$ qui ont pour dénominateur 18 :

$$\rightarrow \frac{-7}{9} = \frac{-7 \times 2}{9 \times 2} = \frac{-14}{18} \quad \text{et} \quad \frac{5}{6} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{15}{18}$$

3) On calcule :

$$\frac{-7}{9} + \frac{5}{6} = \frac{-7 \times 2}{9 \times 2} + \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{-14}{18} + \frac{15}{18} = \frac{1}{18}$$

III. MULTIPLICATION.

Propriété :

Lors de la multiplication de deux écritures fractionnaires, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, en appliquant la gestion des signes.

Soit a, b, c, d quatre nombres tels que $b \neq 0$, $d \neq 0$: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

$$\text{Exemple : } E = \frac{-3}{5} \times \frac{7}{-2} = + \frac{3 \times 7}{5 \times 2} = \frac{21}{10}$$

$$\text{Exemple très détaillé : } \text{Calculer } \frac{-14}{9} \times \frac{6}{-5} \times \frac{-3}{7}$$

1) On détermine d'abord le signe du résultat.

→ Ici, trois facteurs sont négatifs, donc le produit est négatif.

$$\rightarrow \frac{-14}{9} \times \frac{6}{-5} \times \frac{-3}{7} = - \frac{14}{9} \times \frac{6}{5} \times \frac{3}{7}$$

2) On multiplie les numérateurs entre eux et dénominateurs entre eux sans effectuer les calculs

$$\rightarrow \frac{-14}{9} \times \frac{6}{-5} \times \frac{-3}{7} = - \frac{14}{9} \times \frac{6}{5} \times \frac{3}{7} = - \frac{14 \times 6 \times 3}{9 \times 5 \times 7}$$

3) On simplifie en priorité (si possible) le numérateur avec le dénominateur avant de calculer le résultat :

$$\frac{-14}{9} \times \frac{6}{-5} \times \frac{-3}{7} = - \frac{14}{9} \times \frac{6}{5} \times \frac{3}{7} = - \frac{14 \times 6 \times 3}{9 \times 5 \times 7} = - \frac{\boxed{7} \times 2 \times \boxed{3} \times 2 \times \boxed{3}}{\boxed{3} \times \boxed{3} \times 5 \times \boxed{7}} = - \frac{2 \times 2}{5} = - \frac{4}{5}$$

Propriété :

Les règles de priorité des calculs sont les mêmes que celles déjà vues : d'abord les parenthèses (les plus intérieures, puis multiplication et division, puis addition et soustraction).

Remarque :

On essaiera de simplifier numérateur et dénominateur **au plus tôt** chaque fois que cela sera possible.

$$\text{Ex: } \frac{-5}{3} - \frac{3}{-8} \times \frac{-2}{-9} = \frac{-5}{3} - \left(-\frac{3 \times 2}{8 \times 9} \right) = \frac{-5}{3} + \frac{3 \times 2}{4 \times 2 \times 3 \times 3} = \frac{-5}{3} + \frac{1}{12} = \frac{-5 \times 4}{3 \times 4} + \frac{1}{12} = \frac{-20}{12} + \frac{1}{12} = \frac{-19}{12}$$

IV. INVERSE

Propriété :

Deux nombres sont inverses si leur produit est égal à 1.

$$\text{Exemple : } 2 \times 0,5 = 1 \quad -4 \times \left(-\frac{1}{4} \right) = 1 \quad \frac{3}{8} \times \frac{8}{3} = 1$$

Définition :

L'inverse d'un nombre quelconque **x non nul** ($x \neq 0$) est le **quotient de 1 par x**.

$$\rightarrow \text{on le note } \frac{1}{x} \text{ ou } x^{-1}$$

$$\text{Exemple : L'inverse de 2 est } \frac{1}{2}, \text{ l'inverse de 5 est } \frac{1}{5}$$

L'inverse d'une fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$.

$$\rightarrow \text{En effet : } \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = \frac{ab}{ab} = 1.$$

Exemples :

$$\text{L'inverse de } \frac{-2}{5} \text{ est } \frac{5}{-2}, \text{ l'inverse de } \frac{1}{2} \text{ est } \frac{2}{1} \text{ (c'est à dire 2)}$$

V. DIVISION

Propriété :

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

$$\text{Soit a et b deux nombres non nuls : } \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}, \text{ avec } b \neq 0$$

$$\text{Exemples : } \frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} \quad \frac{-2}{0,25} = -2 \times \frac{1}{0,25} = -2 \times 4 = -8$$

$$\text{Soit a, b, c, d quatre nombres non nuls : } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\text{Exemple : } \frac{\frac{5}{8} : \frac{3}{7}}{\frac{5}{8} \times \frac{7}{3}} = \frac{\frac{5}{8} \times \frac{7}{3}}{\frac{5 \times 7}{8 \times 3}} = \frac{35}{24} = \frac{35}{24}$$

En particulier :

$$\text{On a : } x \times \frac{1}{x} = 1 \quad \rightarrow \quad 9 \times \frac{1}{9} = 1$$

Application :

$$F = \frac{\frac{7}{-5}}{\frac{-4}{3}} \left(= \frac{7}{-5} : \frac{-4}{3} \right)$$

$$F = \frac{7}{-5} \times \frac{3}{-4}$$

$$= \frac{7 \times 3}{-5 \times -4}$$

$$F = + \frac{7 \times 3}{5 \times 4}$$

$$F = \frac{21}{20}$$

Exemple très détaillé : Calculer $\frac{\left(\frac{-4}{5}\right)}{\left(\frac{2}{15}\right)}$ *(que l'on peut aussi écrire : $\left(\frac{-4}{5}\right) \div \left(\frac{2}{15}\right)$)*

1) On détermine l'inverse du dénominateur en «permutant» le numérateur et le dénominateur :

→ Ici l'inverse de $\frac{2}{15}$ est $\frac{15}{2}$.

2) On multiplie la dernière fraction obtenue avec la fraction qui est au numérateur :

$$\rightarrow \frac{\left(\frac{-4}{5}\right)}{\left(\frac{2}{15}\right)} = \frac{-4}{5} \times \frac{15}{2} = -\frac{4 \times 15}{5 \times 2} = -\frac{\boxed{2} \times 2 \times 3 \times \boxed{5}}{\boxed{5} \times \boxed{2}} = -2 \times 3 = -6$$

Remarque : La barre de fraction principale doit être plus grande et à hauteur du signe « = » :

$$A = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{8}{8}} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{3 \times 1}{5 \times 8} = \frac{3}{40} \quad \text{et} \quad B = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{8}} = \frac{2}{5} \times \frac{8}{8} = \frac{2 \times 8}{1 \times 5} = \frac{16}{5}$$

Calcul général :

$$C = \frac{\frac{5}{3} - \frac{9}{4}}{\frac{18}{5} \times \frac{10}{9}} = \frac{\frac{5 \times 4}{3 \times 4} - \frac{9 \times 3}{4 \times 3}}{\frac{18 \times 10}{5 \times 9}} = \frac{\frac{20}{12} - \frac{27}{12}}{\frac{9 \times 2 \times 5 \times 2}{5 \times 9}} = \frac{\frac{20 - 27}{12}}{\frac{1}{1}} = \frac{\frac{-7}{12}}{\frac{1}{1}} = \frac{-7}{12} \times \frac{1}{4} = -\frac{7 \times 1}{12 \times 4} = -\frac{7}{48}$$