

Chapitre 5 : Les quatre opérations sur les nombres rationnels

I. Développement et factorisation:

1) Activité:

1°) Calculer $\frac{3}{7} + \frac{-2}{3}$ et $\frac{4}{5} \times (\frac{3}{7} + \frac{-2}{3})$

2°) Calculer $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7}$ et $\frac{4}{5} \times \frac{-2}{3}$

3°) Comparer $\frac{4}{5} \times (\frac{3}{7} + \frac{-2}{3})$ et $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{5} \times \frac{-2}{3}$

Solution:

$$1^{\circ} * \frac{3}{7} + \frac{-2}{3} = \frac{9}{21} + \frac{-14}{21} = \frac{9+(-14)}{21} = \frac{-5}{21}$$

$$* \frac{4}{5} \times (\frac{3}{7} + \frac{-2}{3}) = \frac{4}{5} \times \frac{-5}{21} = \frac{4 \times (-5)}{5 \times 21} = \frac{-4}{21}$$

$$2^{\circ} * \frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{4 \times 3}{5 \times 7} = \frac{12}{35}$$

$$* \frac{4}{5} \times \frac{-2}{3} = \frac{4 \times (-2)}{5 \times 3} = \frac{-8}{15}$$

$$3^{\circ} * \frac{4}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{5} \times \frac{-2}{3} = \frac{12}{35} + \frac{-8}{15} = \frac{36}{105} + \frac{-56}{105} = \frac{36+(-56)}{105} = \frac{-20}{105} = \frac{5 \times (-4)}{5 \times 21} = \frac{-4}{21}$$

On remarque $\frac{4}{5} \times (\frac{3}{7} + \frac{-2}{3}) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{5} \times \frac{-2}{3}$

2) Règle du développement et factorisation:

a) Définitions:

* Le développement c'est l'écriture d'un produit sous forme d'une somme ou d'une différence.

* La factorisation c'est l'écriture d'une somme ou d'une différence en un produit.

b) Règle (a):

a, b et k trois nombres rationnels

Le développement

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a-b) = k \times a - k \times b$$

La factorisation

c) Exemples:

* Développement:

$$A = 2,5 \times (-3 + 11) = 2,5 \times (-3) + 2,5 \times 11 = -7,5 + 27,5 = 20$$

$$B = \frac{-2}{3} \times (\frac{-3}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{-2}{3} \times \frac{-3}{4} - \frac{-2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{(-2) \times (-3)}{3 \times 4} - \frac{(-2) \times 1}{3 \times 2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

* Factorisation:

$$A = 2 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{4}{3} = 2 \times (\frac{1}{5} + \frac{4}{3}) = 2 \times (\frac{3}{15} + \frac{20}{15}) = 2 \times \frac{23}{15} = \frac{2 \times 23}{15} = \frac{46}{15}$$

$$B = \frac{3}{5} \times (\frac{-1}{7} - 1) = \frac{3}{5} \times (\frac{-1}{7} - \frac{7}{7}) = \frac{3}{5} \times (\frac{-1-7}{7}) = \frac{3}{5} \times \frac{-8}{7} = \frac{3 \times (-8)}{5 \times 7} = \frac{-24}{35}$$

3) Règle importantes:

a) Opposé d'une somme:

a et b deux nombres rationnels

$$-(a+b) = (-a) + (-b)$$

b) Opposé d'une différence

a et b deux nombres rationnels

$$-(a-b) = -a + b$$

c) Exemples:

$$* -(\frac{-7}{14} + \frac{15}{9}) = -\frac{-7}{14} - \frac{15}{9} = \frac{-1}{2} + \frac{-5}{3} = \frac{-3}{6} + \frac{-10}{6} = \frac{-3-10}{6} = \frac{-13}{6}$$

$$\begin{aligned} * -\left(\frac{25}{10} - \frac{9}{6}\right) &= -\frac{25}{10} + \frac{9}{6} \\ &= -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{-5+3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

II - Somme et produit de plusieurs nombres rationnels :

1) Règle de calcul d'une somme de plusieurs nombres :

a) Règle ② :

La somme de plusieurs nombres rationnels ne change pas si :

- * si on change l'ordre de ses termes.
- * si on remplace des termes par leur somme.

b) Exemples :

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{7} + \frac{5}{2} - \frac{11}{7} + \frac{7}{2} \\ &= \frac{3}{7} - \frac{11}{7} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} \\ &= \frac{3-11}{7} + \frac{5+7}{2} \\ &= \frac{-8}{7} + \frac{12}{2} \\ &= \frac{-8}{7} + 6 \\ &= \frac{-8}{7} + \frac{42}{7} \\ &= \frac{-8+42}{7} \\ &= \frac{34}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{14}{3} + \frac{4}{9} - 1 - \frac{7}{6} \\ &= \frac{14}{3} - \frac{7}{6} + \frac{4}{9} - 1 \\ &= \frac{28}{6} - \frac{7}{6} + \frac{4}{9} - \frac{2}{2} \\ &= \frac{28-7}{6} + \frac{4-2}{2} \\ &= \frac{21}{6} + \frac{-1}{2} \\ &= \frac{21}{6} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2) Règle de calcul d'un produit de plusieurs nombres :

a) Règle ③ :

Le produit de plusieurs nombres rationnels ne change pas si :

- * si on change l'ordre de ses facteurs.
- * si on remplace des facteurs par leur produit.

b) Exemples :

$$\begin{aligned} A &= \frac{-4}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{-5}{3} \times 11 \\ &= \frac{-4}{5} \times \frac{-5}{3} \times \frac{1}{3} \times 11 \\ &= \frac{(-4) \times (-5)}{5 \times 3} \times \frac{1 \times 11}{3} \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{11}{3} = \frac{4 \times 11}{3 \times 3} = \frac{44}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{7}{6} \times \frac{-4}{9} \times \frac{6}{2} \\ &= \left(\frac{7}{6} \times \frac{6}{2}\right) \times \frac{-4}{9} \\ &= \frac{7 \times 6}{6 \times 2} \times \frac{-4}{9} = \frac{7}{2} \times \frac{-4}{9} \\ &= \frac{7 \times 2 \times (-2)}{2 \times 9} \end{aligned}$$

$$B = \frac{-14}{9}$$

III - Les règles d'organisation de calcul :

1/ Calcul sans parenthèse :

a) Règle ④ :

Dans un calcul sans parenthèse, on commence par la multiplication et la division avant l'addition et la soustraction.

b) Exemple :

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{5} + \frac{6}{8} \times \frac{12}{4} - \frac{9}{15} \div \frac{2}{4} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 2 \times 2 \times 2} - \frac{9}{15} \times \frac{4}{2} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{9}{4} - \frac{7 \times 3 \times 2 \times 2}{3 \times 5 \times 2} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{9}{4} - \frac{6}{5} \\ &= \left(\frac{4}{5} - \frac{6}{5}\right) + \frac{9}{4} = \frac{4-6}{5} + \frac{9}{4} \\ &= \frac{-2}{5} + \frac{9}{4} = \frac{-4}{20} + \frac{45}{20} = \frac{-4+45}{20} = \frac{41}{20} \end{aligned}$$

2/ Calcul avec parenthèses :

a) Règle ⑤ :

Dans un calcul avec parenthèses, on calcule d'abord ce qui est entre parenthèses en commençant par les parenthèses les plus intérieures.

b) Exemple:

$$B = \frac{2}{5} \times \left[\frac{1}{2} + \left(3 - \frac{2}{3} \right) \right] - 1$$

$$= \frac{2}{5} \times \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{9}{3} - \frac{2}{3} \right) \right] - 1$$

$$= \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{3} \right) - 1$$

$$= \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{6} + \frac{14}{6} \right) - 1$$

$$= \frac{2}{5} \times \left(\frac{3+14}{6} \right) - 1$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{17}{6} - 1$$

$$= \frac{2 \times 17}{5 \times 6} - 1 = \frac{17}{15} - 1 = \frac{17}{15} - \frac{15}{15}$$

$$= \frac{17-15}{15} = \frac{2}{15}$$

* Remarques:

* Pour effectuer une suite d'opérations ne contenant que les additions et des soustractions et sans parenthèses, on effectue les calculs de gauche à droite

* Pour effectuer une suite d'opérations ne contenant que les multiplications et les divisions et sans parenthèses, on effectue les calculs de gauche à droite.