

Chapitre ④: Produits et quotients des nombres rationnels

I - Produits de deux nombres rationnels:

1) Activité ①:

1°/ montrer que $\frac{-25}{4} \times \frac{3}{2} = -6,25 \times 1,5$ et calculer

$$\frac{-25}{4} \times \frac{3}{2}$$

2°/ Calculer le quotient du nombre $(-25) \times 3$ sur le nombre 4×2

3°/ Démontrer que $\frac{-25}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{(-25) \times 3}{4 \times 2}$

Solution:

1°/ On a: $\frac{-25}{4} = -6,25$ et $\frac{3}{2} = 1,5$

$$\text{donc } \frac{-25}{4} \times \frac{3}{2} = -6,25 \times 1,5$$

$$\text{Alors } \frac{-25}{4} \times \frac{3}{2} = -9,375$$

2°/ On a $\left\{ \begin{array}{l} (-25) \times 3 = -75 \\ 4 \times 2 = 8 \end{array} \right.$ et $\frac{-75}{8} = -9,375$

3°/ On a $\frac{-25}{4} \times \frac{3}{2} = -9,375$

$$\text{et } \frac{(-25) \times 3}{4 \times 2} = -9,375$$

$$\text{donc } \frac{-25}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{(-25) \times 3}{4 \times 2}$$

2) Règle du produit:

a) Règle ①:

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux nombres rationnels.

$$\text{On a: } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

* Exemples:

$$A = \frac{-3}{7} \times \frac{-11}{2} = \frac{(-3) \times (-11)}{7 \times 2} = \frac{33}{14}$$

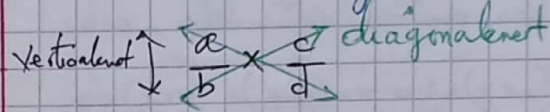
$$B = \frac{-7}{13} \times \frac{2}{3} = \frac{(-7) \times 2}{13 \times 3} = \frac{-14}{39}$$

$$C = \frac{3}{19} \times \frac{-7}{14} = \frac{3 \times (-7)}{19 \times 14} = \frac{-21}{266}$$

b) Remarques importantes:

1°/ Avant de calculer le produit de deux nombres rationnels, il faut d'abord les rendre irréductibles

2°/ Dans un produit, pour rendre les nombres rationnels irréductibles on le fait verticalement ou diagonalement



* Exemples:

$$A = \frac{22}{16} \times \frac{7}{3} = \frac{2 \times 11 \times 7}{2 \times 8 \times 3} = \frac{77}{24}$$

$$B = \frac{36}{24} \times \frac{-21}{14} = \frac{12 \times 3}{12 \times 2} \times \frac{7 \times (-3)}{7 \times 2} = \frac{3}{2} \times \frac{-3}{2} = \frac{3 \times (-3)}{2 \times 2} = \frac{-9}{4}$$

$$C = \frac{35}{18} \times \frac{-9}{15} = \frac{5 \times 7 \times 3 \times (-1)}{3 \times 2 \times 3 \times 5} = \frac{-7}{6}$$

$$D = \frac{27}{36} \times \frac{20}{7} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4} \times \frac{20}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{20}{7} = \frac{3 \times 5}{1 \times 7} = \frac{15}{7}$$

3) Propriétés supplémentaires:

a) Propriété ①:

$\frac{a}{b}$ est un nombre rationnel

$$\frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}, \quad \frac{a}{b} \times 0 = 0, \quad \frac{a}{b} \times (-1) = -\frac{a}{b}$$

b) Exemples:

$$* \frac{127}{141} \times 0 = 0 \quad * \frac{-12}{17} \times 1 = \frac{-12}{17}$$

$$* \frac{91}{110} \times (-1) = \frac{-91}{110} \quad * \frac{-64}{15} \times (-1) = \frac{64}{15}$$

II - Produits de trois nombres rationnels:

1) Activité ②:

1°/ Calculer les opérations suivantes:

$$\left(\frac{-3}{4} \times \frac{-4}{5} \right) \times \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-4}{5} \times \frac{1}{3} \right)$$

2°/ Que remarquez-vous?

Solution:

$$1°) * \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-4}{5} \right) \times \frac{1}{3} = \left(\frac{(-3) \times (-4)}{4 \times 5} \right) \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{3 \times 1}{5 \times 3} = \frac{1}{5}$$

$$* \frac{-3}{4} \times \frac{(-4 \times 1)}{5 \times 3} = \frac{(-3 \times (-4) \times 1)}{4 \times 5 \times 3} = \frac{1}{5}$$

2°) On remarque que:

$$\left(\frac{-3}{4} \times \frac{-4}{5} \right) \times \frac{1}{3} = \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-4}{5} \times \frac{1}{3} \right)$$

2) Propriété ②:

2, y et z, trois nombres rationnels, on a:

$$x \times y \times z = (x \times y) \times z = x \times (y \times z) = (x \times z) \times y$$

3) Exemples:

$$A = \frac{-15}{8} \times \frac{-4}{3} \times \frac{12}{10}$$

$$= \frac{(-15) \times (-4)}{8 \times 3} \times \frac{12}{10}$$

$$= \frac{5 \times (-5) \times (-4)}{4 \times 2 \times 3} \times \frac{12}{10}$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{12}{10} = \frac{5 \times 2 \times 6}{2 \times 5 \times 2} = 3$$

$$B = \frac{25}{6} \times \frac{24}{15} \times \frac{9}{5}$$

$$= \frac{25}{6} \times \frac{24 \times 9}{15 \times 5} = \frac{25 \times 8 \times 3 \times 3}{6 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3}$$

$$= \frac{25 \times 3 \times 3}{6 \times 5} = \frac{5 \times 5 \times 3 \times 3}{3 \times 2 \times 5} = \frac{15}{2}$$

$$C = \frac{15}{-4} \times \frac{3}{5} \times \frac{8}{-1} = \frac{15 \times 3 \times 8}{-4 \times 5 \times -1}$$

$$= \frac{5 \times 3 \times 4 \times 2}{-4 \times 5} \times 3 = \frac{6}{-1} \times 3 = \frac{6 \times 3}{-1}$$

$$C = -18$$

II. Quotient de deux nombres rationnels:

1) Activité ③:

1°) Calculer les produits suivants:

$$\frac{8}{-3} \times \frac{-3}{8} \text{ et } \frac{-14}{11} \times \frac{-11}{14}$$

2°) $\frac{a}{b}$ un nombre rationnel, calculer $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}$

Solution:

$$1°) * \frac{8}{-3} \times \frac{-3}{8} = \frac{8 \times (-3)}{(-3) \times 8} = 1$$

$$* \frac{(-14) \times (-11)}{11 \times 14} = \frac{(-14) \times (-11)}{11 \times 14} = 1$$

$$2°) \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1$$

2°) L'inverse d'un nombre rationnel non nul

nul

a) Définition et Règle:

$\frac{a}{b}$ un nombre rationnel non nul

$$\text{alors on a: } \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

* L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$ noté $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ et on

$$\text{écrit: } \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

* L'inverse de $\frac{b}{a}$ est $\frac{a}{b}$

b) Propriété ③ et notation:

$\frac{a}{b}$ et x deux nombres rationnels non nuls.

$$\text{On a: } \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \text{ et } x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$\text{et on a } \frac{a}{b} \times \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = 1 \text{ et } x \times x^{-1} = 1$$

c) Exemples:

$$* \text{L'inverse de } \frac{-11}{5} \text{ est } \left(\frac{-11}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{-11}$$

$$\text{et on a } \frac{-11}{5} \times \frac{5}{-11} = 1$$

$$* \text{L'inverse de } \frac{1}{7} \text{ est } \left(\frac{1}{7}\right)^{-1} = 7$$

$$\text{et on a } \frac{1}{7} \times 7 = 1$$

$$* \text{L'inverse de } -17 \text{ est } (-17)^{-1} = \frac{1}{-17}$$

$$\text{et on a } -17 \times \frac{1}{-17} = 1$$

3°) Le quotient de deux nombres rationnels:

a) Règle ④:

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux nombres rationnels tels que $\frac{c}{d} \neq 0$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

b) Exemples:

$$A = \frac{12}{8} \div \frac{25}{15} = \frac{12}{8} \times \frac{15}{25} = \frac{4 \times 3}{4 \times 2} \times \frac{5 \times 3}{5 \times 5} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{2 \times 5} = \frac{9}{10}$$

$$B = \frac{\frac{-14}{16}}{\frac{21}{-12}} = \frac{-14}{16} \times \frac{-12}{21} = \frac{-14 \times (-12)}{16 \times 21} = \frac{2 \times 7 \times 2 \times 3}{2 \times 4 \times 4 \times 7 \times 3} = \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{6}{5} \div 3 = \frac{6}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{3 \times 2}{5 \times 3} = \frac{2}{5}$$

$$D = \frac{\frac{-32}{18}}{\frac{18}{12}} = \frac{-32}{18} \times \frac{12}{18} = \frac{-32 \times 6 \times 2}{6 \times 3 \times 18} = \frac{-64}{3}$$

$$E = \frac{\frac{10}{45}}{-20} = \frac{10}{45} \times \frac{1}{-20} = \frac{10 \times 1}{45 \times 10 \times (-2)} = \frac{1}{-90}$$

$$E = \frac{1}{-90}$$