

Chapitre ⑦ : Les puissances

I- Puissance d'un nombre rationnel:

1° Puissance à exposant positif:

a- Définition et vocabulaire:

a un nombre rationnel et n un nombre entier naturel

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

a exposant n
(a puissance n) $\rightarrow a^n$ — exposant
base

b- Cas particuliers:

Si a est un nombre rationnel non nul
alors: $a^0 = 1$, $a^1 = a$

* a^2 se lit: a exposant 2 ou a puissance 2
ou a au carré

* a^3 se lit: a exposant 3 ou a puissance 3
ou a au cube

Remarque: La puissance 0 n'existe pas

c- Exemples:

$$* 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$* (-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$$

$$* 11^3 = 11 \times 11 \times 11$$

$$* (-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$$

$$* \left(-\frac{5}{4}\right)^3 = \left(-\frac{5}{4}\right) \times \left(-\frac{5}{4}\right) \times \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{125}{64}$$

$$* \left(\frac{11}{45}\right)^0 = 1$$

$$* (-25)^1 = -25$$

d- Remarque importante:

a un nombre rationnel non nul, n un entier naturel

* Si n est pair, alors: $(-a)^n = a^n$

* Si n est impair, alors: $(-a)^n = -a^n$

* Exemples:

$$* (-4)^3 = -4^3 = -4 \times 4 \times 4 = -64$$

$$* (-5)^4 = 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

$$* \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$$

2° Puissance à exposant négatif:

a- Définition:

Soient x et a deux nombres rationnels non nul et n un entier positif.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

b- Exemples:

$$* 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

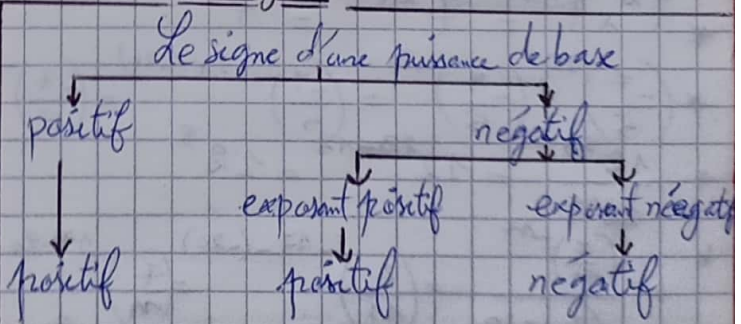
$$* (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$* \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$* \left(\frac{-13}{25}\right)^{-2} = \left(\frac{-25}{13}\right)^2$$

3° Le signe d'une puissance:

a- Règle:



b- Exemples:

* 7^{35} est positif car la base est positif

* $(-11)^{24}$ est positif car l'exposant 24 est pair

* $\left(-\frac{4}{7}\right)^{33}$ est négatif car la base $-\frac{4}{7}$ est négatif et l'exposant 33 est impair

1° Exercices d'application

Calculer les puissances suivantes:

$$25^2, \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}, \left(\frac{-7}{5}\right)^{-3}, \left(\frac{-9}{7}\right)^{-2}, \left(\frac{-1}{2}\right)^5$$

* Solution:

$$* 25^2 = 25 \times 25 = 625$$

$$* \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{64}{27}$$

$$* \left(\frac{-7}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{-5}{7}\right)^3 = -\left(\frac{5}{7}\right)^3 = -\frac{5 \times 5 \times 5}{7 \times 7 \times 7} = -\frac{125}{343}$$

$$* \left(\frac{-9}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{49}{81}$$

$$* \left(\frac{-1}{2}\right)^5 = -\left(\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{32}$$

II - Les opérations sur les puissances:

1° Propriétés:

a, b deux nombres rationnels non nuls,
n et m deux nombres entiers relatifs.

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

2° Exemples:

$$* 7^2 \times 7^{15} = 7^{2+15} = 7^{17}$$

$$* \left(\frac{-7}{5}\right)^{11} \times \left(\frac{-7}{5}\right)^{-20} = \left(\frac{-7}{5}\right)^{11+(-20)} = \left(\frac{-7}{5}\right)^{-9}$$

$$* \frac{12^{23}}{12^{15}} = 12^{23-15} = 12^8$$

$$* \frac{\left(\frac{7}{11}\right)^{-17}}{\left(\frac{7}{11}\right)^{-20}} = \left(\frac{7}{11}\right)^{-17-(-20)} = \left(\frac{7}{11}\right)^{-17+20} = \left(\frac{7}{11}\right)^3$$

$$* 25^{14} \times 10^{14} = (25 \times 10)^{14} = (250)^{14}$$

$$* \left(\frac{-5}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{-5}{3} \times \frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{-5}{6}\right)^4$$

$$* \frac{21^5}{3^5} = \left(\frac{21}{3}\right)^5 = 7^5$$

$$* \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^3}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \left(\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{1}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3$$

$$* (12^{-7})^4 = 12^{-28} = \frac{1}{12^{28}}$$

$$* \left(\left(\frac{-7}{6}\right)^{11}\right)^{-6} = \left(\frac{-7}{6}\right)^{11 \times (-6)} = \left(\frac{-7}{6}\right)^{-66} = \frac{1}{\left(\frac{-7}{6}\right)^{66}}$$

3° Exercices d'application:

* Exercice 1: Calculer les puissances suivantes:

$$A = \left(\frac{-1}{2}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{-1}{2}\right)^{1+2} = \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

$$B = \left(\frac{11}{7}\right)^{11} \times \left(\frac{11}{7}\right)^{-11} = \left(\frac{11}{7}\right)^{11-11} = \left(\frac{11}{7}\right)^0 = 1$$

$$C = \frac{5^{-7}}{5^6 \times (5^2)^{-1}} = \frac{5^{-7}}{5^6 \times 5^{-2}} = \frac{5^{-7}}{5^{6-2}} = \frac{5^{-7}}{5^4} = 5^{-7-4} = 5^{-11} = \frac{1}{5^{11}} = \frac{1}{125}$$

$$D = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^3} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{\left(\frac{2}{3}\right)^9} = \left(\frac{2}{3}\right)^{6-9} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{8}{27}} = \frac{27}{8}$$

* Exercice 2: Soient a, b deux nombres rationnels non nuls

9. Ecrire sous forme d'une puissance:

$$A = a^{-3} \times a^4 \times \frac{1}{a^7} = a^{-3+4-7} = a^{-6}$$

$$B = \frac{a^3 \times a^5}{(a^5 \times a)^{-2}} = \frac{a^8}{a^{-10}} = a^{8-(-10)} = a^{18}$$

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{(a \times b^2)^{-3} \times a}{a^{-5} \times b^{-3}} \\
 &= \frac{a^{-3} \times b^{-6} \times a}{a^{-5} \times b^{-3}} = \frac{a^{-2} \times b^{-2}}{a^{-5} \times b^{-3}} \\
 &= a^{-2+5} \times b^{-2+3} \\
 &= a^3 \times b
 \end{aligned}$$

III - L'écriture scientifique:

1° Définition:

Soient a un nombre décimal et n un nombre entier relatif non nul.

Toute écriture de la forme

$$x = a \times 10^n \text{ ou } x = -a \times 10^n \text{ avec } 1 \leq a < 10$$

s'appelle écriture scientifique de x

2° Exemples:

Cherchons l'écriture scientifique des nombres suivants:

$$a = 3452$$

$$= 3,452 \times 10^3$$

$$b = -0,00000234$$

$$= -2,34 \times 10^{-6}$$

$$c = 678,25 \times 10^5$$

$$= 6,7825 \times 10^2 \times 10^5$$

$$= 6,7825 \times 10^7$$

$$d = -0,000254 \times 10^{-9}$$

$$= -2,54 \times 10^{-4} \times 10^{-9}$$

$$= -2,54 \times 10^{-13}$$

$$e = -24,5 \times 10^{-11} \times 1,2 \times 10^{-3}$$

$$= -24,5 \times 1,2 \times 10^{-11} \times 10^{-3}$$

$$= -29,4 \times 10^{-8}$$

$$= -2,94 \times 10 \times 10^{-8}$$

$$= -2,94 \times 10^{-7}$$

$$f = -113 \times 10^5 + 7,2 \times 10^7$$

$$= -113 \times 10^5 + 7,2 \times 10^2 \times 10^5$$

$$= -113 \times 10^5 + 720 \times 10^5$$

$$= (-113 + 720) \times 10^5$$

$$= 607 \times 10^5$$

$$= 6,07 \times 10^2 \times 10^5$$

$$= 6,07 \times 10^7$$

3° Ordre de grandeur:

Écriture scientifique	Encadrement par deux puissances successives de 10	Un ordre de grandeur
$A = 2,13 \times 10^5$	$10^5 < A < 10^6$	2×10^5
$B = 7,28 \times 10^{-3}$	$10^{-3} < B < 10^{-2}$	7×10^{-3}
$C = 9,62 \times 10^{-5}$	$10^{-5} < C < 10^{-4}$	9×10^{-5}