LES PUISSANCES

I. Les puissances de dix

Définition :

Soit n un entier positif.

On note 10^n le nombre $\underbrace{10\times10\times...\times10}_{n}$, c'est-à-dire le produit de n facteurs égaux à 10 :

$$10^n = \underbrace{10\times10\times...\times10}_{n} = 1\underbrace{000...000}_{n\ zéros}$$ (le nombre n est appelé **exposant**)

Exemple : $10^4 = 10\times10\times10\times10 = 10000$

Remarques : Un million se note 10^6 et un milliard se note 10^9.

Ainsi :

$$1000 = 10^3$$
$$100 = 10^2$$
$$10 = 10^1$$
$$1 = 10^0$$
$$\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10^{-1}$$

Par convention, on convient que : $10^0 = 1$.

Définition :

Soit n un entier positif non nul.

On note 10^{-n} l'inverse de 10^n :

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0{,}\underbrace{000...001}_{n\ chiffres}.$$

Exemples : $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$ $\qquad 10^{-1} = 0{,}1$ $\qquad 10^{-5} = 0{,}\underbrace{00001}_{5\ chiffres}$

II. Puissances entières d'un nombre relatif : exposant entier positif

Définition :

Soit a un nombre relatif et n un entier positif non nul.

On note a^n, le nombre $\underbrace{a\times a\times...\times a}_{n}$, c'est-à-dire le produit de n facteurs égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a\times a\times...\times a}_{n}$$

Exemples : $4^5 = 4\times4\times4\times4\times4 = 1024$

$(-7)^3 = (-7)\times(-7)\times(-7) = -343$

$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

Par convention, si $\underline{a \neq 0}$: $a^0 = 1$. → $7^0 = 1$

Remarque : Une puissance s'adresse au symbole qui la précède : $(-8)^0 = 1$ $-8^0 = -1$

<u>Attention !</u>

- Il ne faut pas confondre 5^3 et 5×3 ! → $5^3 = 5\times5\times5 = 125$ et $5\times3 = 15$
- Il ne faut pas confondre 3^4 et 4^3 ! → $3^4 = 3\times3\times3\times3 = 81$ et $4^3 = 4\times4\times4 = 64$
- Il ne faut pas confondre $(-3)^4$ et -3^4 !

→ $(-3)^4 = (-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3) = 81$ et $-3^4 = -(3\times3\times3\times3) = -81$

<u>Remarques :</u>

1) Pour tout a, $a^1 = a$ → $7^1 = 7$
2) **Les puissances d'exposants pairs sont toujours positives**

$(-8)^{42}$ est positif → $(-8)^{42} = 8^{42}$

III. <u>Puissances entières d'un nombre relatif : exposant entier négatif</u>

<u>Définition</u> :

Soit a un nombre relatif <u>non nul</u> et n un entier non nul.

On note a^{-n} l'inverse de a^n : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n}}$

<u>Exemples</u> : 2^{-3} est l'inverse de 2^3 → $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{2\times2\times2} = \dfrac{1}{8}$

$(-3)^{-2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{(-3)\times(-3)} = \dfrac{1}{9}$

Cas particulier, si $\underline{a \neq 0}$: a^{-1} **est l'inverse de a :** $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

→ $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$, $(-6)^{-1} = \dfrac{1}{-6} = -\dfrac{1}{6}$

<u>Attention !</u>

Le nombre 2^{-3} n'est pas égal à 0,002! → $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{2\times2\times2} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

IV. <u>Notation scientifique d'un nombre</u>

<u>Propriété :</u> Un nombre décimal admet plusieurs écritures de la forme $a\times10^n$ dans laquelle a désigne un nombre décimal et n un entier relatif.

Exemples :

$$3\ 750\ 000 = 3\ 750\times10^{3} = 375\times10^{4} = 3,75\times10^{6} = 0,375\times10^{7}$$

$$0,00425 = 425\times10^{-5} = 42,5\times10^{-4} = 4,55\times10^{-3} = 0,425\times10^{-2}$$

Définition : **L'écriture scientifique** d'un nombre est la seule écriture de la forme $a\times10^{p}$ dans laquelle a s'écrit avec un seul chiffre avant la virgule, a étant différent de 0.

Exemples :

L'écriture scientifique de	$3\ 750\ 000$	est	$3,75\times10^{6}$
L'écriture scientifique de	$0,00425$	est	$4,55\times10^{-3}$
L'écriture scientifique de	$-25\ 000\ 000\ 000$	est	$-2,5\times10^{10}$

V. Règles de calcul

1. Les puissances de 10

Quelques exemples de calculs :

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$10^{2}\times10^{4}=10\times10\times10\times10\times10\times10$ $=1000000$ $=10^{6}$	$\frac{1}{10^{3}}=\frac{1}{1000}$ $=0,001$ $=10^{-3}$	$\frac{10^{5}}{10^{2}}=\frac{10\times10\times10\times10\times10}{10\times10}$ $=10\times10\times10$ $=10^{3}$	$\left(10^{4}\right)^{2}=\left(10\times10\times10\times10\right)^{2}$ $=10000^{2}$ $=100000000$ $=10^{8}$

REGLES DE CALCUL :

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$10^{m}\times10^{n}=10^{m+n}$	$\frac{1}{10^{n}}=10^{-n}$	$\frac{10^{m}}{10^{n}}=10^{m-n}$	$\left(10^{m}\right)^{n}=10^{m\times n}$
$10^{2}\times10^{4}=10^{6}$	$\frac{1}{10^{3}}=10^{-3}$	$\frac{10^{5}}{10^{2}}=10^{3}$	$\left(10^{4}\right)^{2}=10^{8}$

2. Les puissances de nombres relatifs

Quelques exemples de calculs :

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance

$4^2 \times 4^3 = 4\times4\times4\times4\times4$ $= 4^5$	$\frac{1}{5^3} = 5^{-3}$	$\frac{(-3)^3}{(-3)^5} = \frac{(-3)\times(-3)\times(-3)}{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}$ $= \frac{1}{(-3)\times(-3)}$ $= \frac{1}{(-3)^2}$ $= (-3)^{-2}$	$(6^3)^{-2} = \frac{1}{(6^3)^2}$ $= \frac{1}{(6\times6\times6)^2}$ $= \frac{1}{6\times6\times6\times6\times6\times6}$ $= \frac{1}{6^6} = 6^{-6}$

REGLES DE CALCUL :

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{m\times n}$
$4^2 \times 4^3 = 4^5$	$\frac{1}{5^3} = 5^{-3}$	$\frac{(-3)^3}{(-3)^5} = (-3)^{3-5} = (-3)^{-2}$	$(6^3)^{-2} = 6^{3\times(-2)} = 6^{-6}$

Attention !

Il ne faut pas confondre $10^2 + 10^3$ avec 10^5 !

$\rightarrow$ $10^2 + 10^3 = 100 + 1000 = 1100$ et $10^5 = 100\,000$

Il ne faut pas confondre $10^4 + 10^4$ avec 20^4 !

$\rightarrow$ $10^4 + 10^4 = 20\,000$ et $20^4 = 160\,000$

3. Règles de priorité

Propriété :

Quand une expression comporte des puissances, on calcule en priorité :

1. Les calculs entre parenthèses
2. Les puissances
3. Les multiplications et les divisions

Exemples : $11\times(8+3)^5 = 11\times11^5 = 11^6$

$7 - 5\times4^2 = 7 - 5\times16 = 7 - 80 = -73$

Propriété :

Pour deux nombres a et b non nuls, on a :

$(a\times b)^p = a^p \times b^p$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

Ainsi : $(a\times b)^2 = ab\times ab = a\times a\times b\times b = a^2\times b^2$

Exemples : $(2\times5)^4 = 2^4\times5^4$,

$$\begin{aligned}(3x)^2 &= 3x\times3x\\ &= 3\times x\times3\times x\\ &= 3\times3\times x\times x\\ &= 9x^2\end{aligned}$$

→ ainsi : $(3x)^2 \neq 3x^2$,

$\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{2^3}{5^3}$,

Exercice : Soit $A = 4\times10^5$ et $B = 5\times10^{-3}$,
Calculer A + B puis $A\times B$ et donner chaque résultat en écriture scientifique.

$$\begin{aligned}A\times B &= (4\times10^5)\times(5\times10^{-3})\\ &= 4\times10^5\times5\times10^{-3}\\ &= 4\times5\times10^5\times10^{-3}\\ &= 20\times10^2\\ &= 2\times10\times10^2\\ &= 2\times10^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \frac{4\times10^5}{5\times10^{-3}}\\ &= \frac{4}{5}\times\frac{10^5}{10^{-3}}\\ &= 0{,}8\times10^8\\ &= 0{,}8\times10\times10^7\\ &= 8\times10^7\end{aligned}$$

VI. Règles de calcul

1. Les puissances de 10

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$10^2 \times 10^4 = 10\times10\times10\times10\times10\times10$ $= 1000\,000$ $= 10^6$	$\dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000}$ $= 0,001$ $= 10^{-3}$	$\dfrac{10^5}{10^2} = \dfrac{10\times10\times10\times10\times10}{10\times10}$ $= 10\times10\times10$ $= 10^3$	$\left(10^4\right)^2 = \left(10\times10\times10\times10\right)^2$ $= 10\,000^2$ $= 100\,000\,000$ $= 10^8$

REGLES DE CALCUL :

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$	$\dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$	$\dfrac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$	$\left(10^m\right)^n = 10^{m\times n}$
$10^2 \times 10^4 = 10^6$	$\dfrac{1}{10^3} = 10^{-3}$	$\dfrac{10^5}{10^2} = 10^3$	$\left(10^4\right)^2 = 10^8$

2. Les puissances de nombres relatifs

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$4^2 \times 4^3 = 4\times4\times4\times4\times4$ $= 4^5$	$\dfrac{1}{5^3} = 5^{-3}$	$\dfrac{(-3)^3}{(-3)^5} = \dfrac{(-3)\times(-3)\times(-3)}{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}$ $= \dfrac{1}{(-3)\times(-3)}$ $= \dfrac{1}{(-3)^2}$ $= (-3)^{-2}$	$\left(6^3\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(6^3\right)^2}$ $= \dfrac{1}{(6\times6\times6)^2}$ $= \dfrac{1}{6\times6\times6\times6\times6\times6}$ $= \dfrac{1}{6^6} = 6^{-6}$

REGLES DE CALCUL :

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\left(a^m\right)^n = a^{m\times n}$
$4^2 \times 4^3 = 4^5$	$\dfrac{1}{5^3} = 5^{-3}$	$\dfrac{(-3)^3}{(-3)^5} = (-3)^{3-5} = (-3)^{-2}$	$\left(6^3\right)^{-2} = 6^{3\times(-2)} = 6^{-6}$

Attention !

Il ne faut pas confondre $10^2 + 10^3$ avec 10^5 !

→ $10^2 + 10^3 = 100 + 1000 = 1100$ et $10^5 = 100\,000$

Il ne faut pas confondre $10^4 + 10^4$ avec 20^4 !

→ $10^4 + 10^4 = 20\,000$ et $20^4 = 160\,000$

3. Règles de priorité

Propriété :

Quand une expression comporte des puissances, on calcule en priorité :

1. Les calculs entre parenthèses

2. Les puissances

3. Les multiplications et les divisions

Exemples : $11\times(8+3)^5 = 11\times 11^5 = 11^6$

$$7-5\times 4^2 = 7-5\times 16 = 7-80 = -73$$

Propriété :

Pour deux nombres a et b non nuls, on a :

$$(a\times b)^p = a^p \times b^p \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Ainsi : $(a\times b)^2 = ab\times ab = a\times a\times b\times b = a^2\times b^2$

Exemples : $(2\times 5)^4 = 2^4\times 5^4$,

$$\begin{aligned}(3x)^2 &= 3x\times 3x\\ &= 3\times x\times 3\times x\\ &= 3\times 3\times x\times x\\ &= 9x^2\end{aligned}$$

→ ainsi : $(3x)^2 \neq 3x^2$,

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3},$$

Exercice : Soit $A = 4\times 10^5$ et $B = 5\times 10^{-3}$,

Calculer A + B puis $A\times B$ et donner chaque résultat en écriture scientifique.

$$\begin{aligned}A\times B &= (4\times 10^5)\times(5\times 10^{-3})\\ &= 4\times 10^5\times 5\times 10^{-3}\\ &= 4\times 5\times 10^5\times 10^{-3}\\ &= 20\times 10^2\\ &= 2\times 10\times 10^2\\ &= 2\times 10^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \frac{4\times 10^5}{5\times 10^{-3}}\\ &= \frac{4}{5}\times\frac{10^5}{10^{-3}}\\ &= 0{,}8\times 10^8\\ &= 0{,}8\times 10\times 10^7\\ &= 8\times 10^7\end{aligned}$$