

الدرس (4) : تقنين الأعداد الحقيقية

I - الجزء المربع لعدد حقيقي موجب :

(1) تعريف :

إذا كان a عدد حقيقيا موجبا فإنه يوجد عدد حقيقي x يحقق $x^2 = a$

العدد x يسمى الجزء المربع للعدد a ونكتب

$$x = \sqrt{a}$$

(2) أمثلة :

$$\begin{aligned} x^2 = 11 & \text{ يعني } x = \sqrt{11} \\ x^2 = \frac{1}{2} & \text{ يعني } x = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ x^2 = \frac{17}{3} & \text{ يعني } x = \sqrt{\frac{17}{3}} \end{aligned}$$

* ملاحظات مهمة :

- الكتابة $\sqrt{a}$ ليس لها معنى إلا إذا كان $a \geq 0$
- أي أن ما يدخل الجزء المربع يجب أن يكون موجبا.
- العدد $\sqrt{4}$ يقرأ جزء مربع 4 وهو ليس بعدد عشري نسبي ولا جذري وإنما يسمى عدد حقيقي.

(3) خاصية أساسية :

$$a \text{ عدد حقيقي موجب : } \sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = a$$

* ملاحظات :

- إذا كان a عدد حقيقي موجب فإن الكتابات $\sqrt{a^2}$ و $\sqrt{a^2}$ و $(\sqrt{a})^2$ كلها متساوية
- $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$
- نقابل العدد $\sqrt{a}$ والعدد $\sqrt{a}$
- أتنبه إشارة " " توجد خارج الجذر وليه داخله
- نقول العدد $\sqrt{a}$ هو العدد $\frac{1}{\sqrt{a}}$

ب - أمثلة للحفظ :

* جدول يعطي المربع الكامل :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a ²	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

* أمثلة للحفظ :

$$\begin{aligned} * \sqrt{0^2} = \sqrt{0^2} = 0 \\ * \sqrt{1^2} = \sqrt{1^2} = 1 \\ * \sqrt{4^2} = \sqrt{2^2} = 2 \\ * \sqrt{9^2} = \sqrt{3^2} = 3 \\ * \sqrt{16^2} = \sqrt{4^2} = 4 \\ * \sqrt{25^2} = \sqrt{5^2} = 5 \\ * \sqrt{36^2} = \sqrt{6^2} = 6 \\ * \sqrt{169^2} = \sqrt{13^2} = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \sqrt{49^2} = \sqrt{7^2} = 7 \\ * \sqrt{64^2} = \sqrt{8^2} = 8 \\ * \sqrt{81^2} = \sqrt{9^2} = 9 \\ * \sqrt{100^2} = \sqrt{10^2} = 10 \\ * \sqrt{121^2} = \sqrt{11^2} = 11 \\ * \sqrt{144^2} = \sqrt{12^2} = 12 \\ * \sqrt{196^2} = \sqrt{14^2} = 14 \end{aligned}$$

* ملاحظة :

إذا كان العدد الذي دخل الجزء المربع موجبا كاملا فإن الجزء جذري، وإذا لم يكن كذلك فإنه الجزء يبقى

II - تطبيقات

(1) مسألة هندسية :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث AB=4cm و BC=5cm احسب AC

لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في A

أي حسب جبرهنة فيثاغورس المباشرة فإنه

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$5^2 = 4^2 + AC^2$$

$$25 = 16 + AC^2$$

$$AC^2 = 25 - 16$$

$$AC^2 = 9$$

$$AC = \sqrt{9}$$

$$AC = 3 \text{ cm}$$

* ملاحظة :

$$BC = \sqrt{5}$$

تستعمل الآلة الحاسبة لتحديد القيمة التقريبية لـ $\sqrt{5}$

$$BC \approx 2,23 \text{ cm}$$

(2) حل المعادلة $x^2 = a$ و $(a, 0)$

* المعادلة $x^2 = 3$ تكافئ على التالي

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\begin{array}{l} x - \sqrt{3} = 0 \quad \vee \quad x + \sqrt{3} = 0 \\ x = \sqrt{3} \quad \vee \quad x = -\sqrt{3} \end{array}$$

لذلك هذه المعادلة قابل حلين هما $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$

* المعادلة $x^2 = 49$ تكافئ على التالي

$$x^2 - 49 = 0$$

$$x^2 - 7^2 = 0$$

$$(x - 7)(x + 7) = 0$$

$$x - 7 = 0 \quad \vee \quad x + 7 = 0$$

$$x = 7 \quad \vee \quad x = -7$$

لذلك هذه المعادلة قابل حلين هما 7 و -7

الخلاصة :

- إذا كان $a > 0$ فإن معادلة $x^2 = a$ لها حلان هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

- إذا كان $a < 0$ فإن معادلة $x^2 = a$ ليس لها حل

المعادلة $x^2 = -5$ ليس لها حل لأن $-5 < 0$

(3) الجبر المربع والعكس :

A = $\sqrt{25} + \sqrt{3}^2$

$$= \sqrt{5^2} + \sqrt{3^2}$$

$$= 5 + 3 \Rightarrow \boxed{A = 8}$$

B = $\sqrt{\frac{81}{4}} - \sqrt{\frac{16}{4}}$

$$= \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2} - \sqrt{4}$$

$$= \frac{9}{2} - \sqrt{2^2}$$

$$= \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$$

C = $\frac{\sqrt{121}}{7} \times \sqrt{8^2} = \frac{\sqrt{11^2}}{7} \times \sqrt{8^2}$

$$= \frac{11}{7} \times 8 = 11 \times \frac{8}{7} = \frac{88}{7}$$