

المثلث القائم الزاوية و الدائرة

I - خاصية منتصف وتر مثلث قائم الزاوية :

(1) - الخاصية المباشرة :

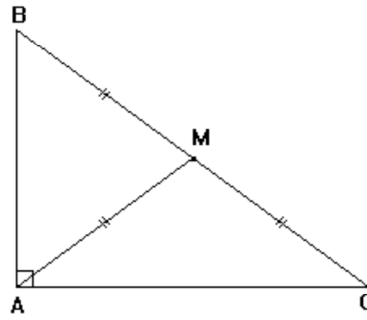
إذا كان مثلث قائم الزاوية فإن منتصف وتره يبعد بنفس المسافة عن رؤوسه.
أي محاط بدائرة مركزها منتصف الوتر .

► بتعبير آخر :

إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في A و M منتصف $[BC]$
فإن : $MA = MB = MC$ أي: ABC محاط بدائرة مركزها M

► مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في A و M منتصف $[BC]$.



سيكون لدينا : $MA = MB = MC$.

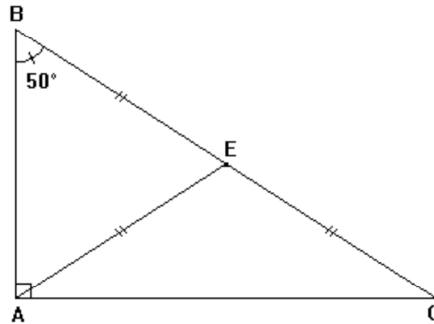
تمرين تطبيقي :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث : $\hat{ABC} = 50^\circ$ و E منتصف $[BC]$.

- (1) - أرسم شكلا مناسباً .
- (2) - ماهي طبيعة المثلث AEB ؟ علل جوابك .
- (3) - استنتج قياس الزاوية $\hat{EAB}$.

الحل :

(1) - الشكل :



(2) - طبيعة المثلث AEB .

نعلم أن : ABC مثلث قائم الزاوية في A .
و E منتصف الوتر $[BC]$.

إذن : $EA = EB = EC$.

أي : $EA = EB$.

و منه فإن المثلث AEB متساوي الساقين رأسه E .

(3) - لنستنتج قياس الزاوية $E\hat{A}B$.

نعلم أن : AEB مثلث متساوي الساقين في E .

إذن : $E\hat{A}B = E\hat{B}A$.

وبما أن : $E\hat{B}A = 50^\circ$ فإن : $E\hat{A}B = 50^\circ$

(2) - الخاصية العكسية :
خاصية:

إذا كان منتصف أحد أضلاع مثلث يبعد بنفس المسافة عن رؤوسه ، فإن هذا المثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع .

▶ بتعبير آخر :

ABC مثلث و E منتصف $[AB]$.

إذا كان : $EA = EB = EC$

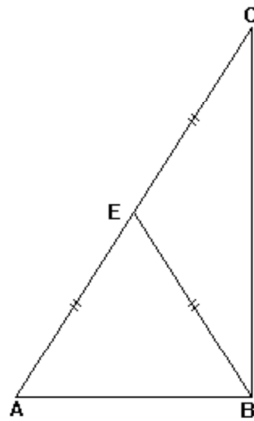
فإن ABC مثلث قائم الزاوية في C .

تمرين تطبيقي :

AEB مثلث متساوي الساقين في E و C مائلة A بالنسبة للنقطة E .

(1) - أرسم شكلا مناسباً .

(2) - أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية .



الحل :

(1) - الشكل :

(2) - لنثبت أن ABC مثلث قائم الزاوية .

نعلم أن : AEB مثلث متساوي الساقين رأسه E .

إذن : $EA = EB$ ① .

و نعلم أن : C هي مائلة A بالنسبة للنقطة E .

إذن : E منتصف $[AC]$.

ومنه فإن : $EA = EC$: ② .

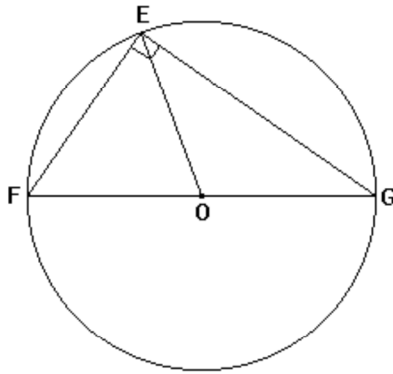
من ① و ② نستنتج أن : $EA = EB = EC$.
وبالتالي :

E منتصف $[AC]$ } لدينا في المثلث ABC : و
 $EA = EB = EC$

إذن : ABC مثلث قائم الزاوية في B .

II - المثلث القائم الزاوية و الدائرة :

(1) - مثال :



EFG مثلث قائم الزاوية في E و O منتصف $[FG]$.

-- لنثبت أن O هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث EFG محددتين شعاعها .

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E .

وبما أن O منتصف وتره $[FG]$ فإن : $OE = OF = OG$ (حسب الخاصية المباشرة)

ومنه فإن E و F و G تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O .

وبالتالي فإن O هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث EFG و التي شعاعها $\frac{FG}{2}$.

(2) - خاصية :

إذا كان مثلث قائم الزاوية فإن منتصف وتره هو مركز الدائرة المحيطة به و التي شعاعها هو نصف طول وتره

► بتعبير آخر :

إذا كان ABC مثلثا قائم الزاوية في A و O منتصف وتره $[BC]$

فإن : O هو مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و التي شعاعها $\frac{BC}{2}$

III - مبرهنة فيثاغورس :

(1) - الخاصية المباشرة :

إذا كان ABC مثلثا قائم الزاوية في A فإن :
 $BC^2 = AB^2 + AC^2$

➡ تطبيق :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث : $AB = 3 \text{ cm}$ و $BC = 5 \text{ cm}$.
لنحسب AC .

لدينا حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

إذن :

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$AC^2 = 5^2 - 3^2$$

$$AC^2 = 25 - 9$$

$$AC^2 = 16$$

وبما أن AC عدد موجب فإن : $AC = 4$.

(2) - الخاصية العكسية :

إذا كان ABC مثلثا بحيث : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
فإن: هذا المثلث قائم الزاوية في A .

➡ تطبيق :

ABC مثلث بحيث : $AC = \frac{3}{5}$ و $AB = 1$ و $BC = \frac{4}{5}$.

لنبين أن المثلث ABC قائم الزاوية .

لدينا : $AB^2 = 1^2 = 1$ و $BC^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ و $AC^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

نلاحظ أن : $1 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25}$ أي : $AB^2 = AC^2 + BC^2$

و حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في C .

(3) - خاصية لأضلاع مثلث قائم الزاوية :

خاصية:

إذا كان مثلث قائم الزاوية فإن طول وتره أكبر من
طولي ضلعي الزاوية القائمة .

VI - جيب تمام زاوية حادة :

(1) - تعريف :

جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية يساوي خارج طول الضلع المجاور للزاوية الحادة على طول الوتر

► إصطلاحات :

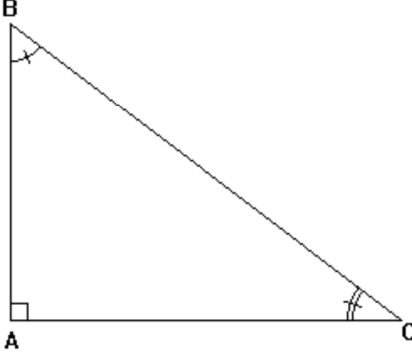
ABC مثلث قائم الزاوية في A

-- الزاويتان الحادتان هما : $\hat{A}CB$ و $\hat{ABC}$.

-- [AB] هو الضلع المجاور للزاوية $\hat{ABC}$ ، والمقابل للزاوية $\hat{ACB}$.

-- [AC] هو الضلع المجاور للزاوية $\hat{ACB}$ ، والمقابل للزاوية $\hat{ABC}$.

-- [BC] هو الوتر.



► بتعبير آخر :

ABC مثلث قائم الزاوية في A .

$$\cos \hat{A}CB = \frac{AC}{BC} \quad \text{و} \quad \cos \hat{ABC} = \frac{AB}{BC}$$

► ملاحظة هامة :

$$0 < \cos \alpha < 1 \quad \alpha \text{ قياس زاوية حادة} :$$

(2) - مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث : $AB = 3 \text{ cm}$ و $AC = 4 \text{ cm}$. لنحسب $\cos \hat{ABC}$.

لنحسب أولاً BC .

بما أن ABC مثلث قائم الزاوية في A فإن حسب مبرهنة فيثاغورس :