

PROPORTIONNALITÉ

12

I – Qu'est-ce que c'est ?

Définitions

Dans un tableau où deux grandeurs A et B interviennent, si tous les quotients des nombres dans la grandeur A par les nombres correspondants de la grandeur B sont les mêmes (il y a autant de quotients que de colonnes), alors on dit que c'est un **tableau de proportionnalité**, et que ce quotient est le **coefficient de proportionnalité**.

Exemple : On donne les temps mis par un coureur selon la distance parcourue :

Temps (en min)	15	30	60	90
Distance (en km)	5	10	20	30

On calcule que $\frac{15}{5} = 3$; $\frac{30}{10} = 3$; $\frac{60}{20} = 3$ et $\frac{90}{30} = 3$. Tous ces quotients sont égaux, on en déduit que :

- * c'est un tableau de proportionnalité, donc le temps mis par ce coureur est proportionnel à la distance parcourue.
- * le coefficient de proportionnalité est égal à 3.

■ **EXERCICE 1 (DANS TON CAHIER) :** Les tableaux suivants sont-ils des tableaux de proportionnalité ? Justifie.

Grandeur A	3	5	8
Grandeur B	12	20	32

Tableau 1

Grandeur A	4	6	7
Grandeur B	28	42	49

Tableau 2

Grandeur A	2	3	4
Grandeur B	35	45	55

Tableau 3

Grandeur A	1,5	4,5	6
Grandeur B	2,5	7,5	10,5

Tableau 4

II – Comment compléter un tableau de proportionnalité ?

Règle 1 (« produit en croix »)

Dans un tableau de proportionnalité de quatre cases, s'il manque une valeur, on la calcule de la manière suivante :

1. On fait apparaître une croix au milieu du tableau.
2. On multiplie au numérateur les deux nombres de la diagonale « complète » (celle où les deux extrémités sont connues), et on divise au dénominateur par le nombre restant :

Grandeur A	15	?
Grandeur B	5	25

$$\frac{15 \times 25}{5} = \frac{375}{5} = 75.$$

■ **EXERCICE 2 (SUR CE TD) :** Complète les tableaux de proportionnalités suivants :

4	10
6	

Calcul :

$$\frac{\quad \times \quad}{4} = \frac{\quad}{4}$$

$$= \dots\dots$$

11	
20	8

Calcul :

$$\frac{\quad \times 8}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$= \dots\dots$$

15	6
	4

Calcul :

$$\frac{\quad \times \quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$= \dots\dots$$

■ **EXERCICE 3 (SUR CE TD) :** Complète les tableaux de proportionnalités suivants, en écrivant en-dessous de chaque tableau le calcul du produit en croix :

9	6
	4

10	15
8	

6	
14	7

	10
5	15

Il peut y avoir plus que quatre cases dans un tableau de proportionnalité, il faut alors sélectionner deux lignes et deux colonnes qui donnent un "sous-tableau" de quatre cases dans lequel on connaît trois valeurs.

Exemple : Voici un tableau de proportionnalité à compléter :

6	9	15		30	
	21		63		84

On calcule que : $\frac{6 \times 21}{9} = \frac{126}{9} = 14$; $\frac{21 \times 15}{9} = \frac{315}{9} = 35$; $\frac{9 \times 63}{21} = \frac{567}{21} = 27$.

ce qui donne donc le tableau complété suivant :

6	9	15	27	30	
14	21	35	63		84



Remarque

Pour le calcul orange, on a utilisé les 2^e et 4^e colonnes du tableau, ce qui forme le "sous-tableau" suivant :

9	?
21	63

C'est dans ce tableau qu'on a appliqué la produit en croix $\frac{9 \times 63}{21} = \frac{567}{21} = 27$.

■ **EXERCICE 4 (DANS TON CAHIER) :** Complète les deux cases restantes du tableau ci-dessus (celui juste au-dessus de la remarque) en écrivant le détail de tes calculs dans ton cahier.

■ **EXERCICE 5 (SUR CE TD ET DANS TON CAHIER) :** Complète le tableau ci-dessous, en écrivant les calculs dans ton cahier :

4	2	6			14
		9	15	18	

III — Pourcentages

Un pourCENTage est un nombre sur 100. Tout problème ou question utilisant les pourcentages contient nécessairement de la proportionnalité, donc peut se résoudre grâce à un tableau de proportionnalité.



Règle 2 (« pourcentage d'une quantité »)

L'expression française « $p\%$ de x » se traduit mathématiquement par un tableau de proportionnalité. Par exemple, pour calculer 18% de 250, on procède de la manière suivante :

18	?
100	250

$$\frac{18 \times 250}{100} = \frac{250 \times 18}{100} = \frac{250}{100} \times 18 = 2,5 \times 18 = 45.$$

Exemple : Au collège, 360 contrôles ont été fait l'année dernière. Un quart des contrôles concernait les maths, 30% le français et 10% l'histoire-géographie. Dans chaque cas, calcule le nombre de contrôles donnés dans chaque matière.

Pour les maths, il s'agit de calculer « 25% (un quart) de 360 ». On fait donc un tableau de proportionnalité :

25	?
100	360

$$\frac{25 \times 360}{100} = \frac{9\,000}{100} = 90.$$

On en déduit que 90 contrôles ont été donnés en mathématiques l'année dernière.

■ **EXERCICE 6 (SUR CE TD) :** Complète les phrases et calculs suivants pour déterminer le nombre de contrôles en français :

Pour le français, il s'agit de calculer «% de 360. » On fait donc un tableau de proportionnalité :

.....	?
.....	360

$$\frac{..... \times}{100} = \frac{.....}{100} =$$

On en déduit que contrôles ont été donnés en français l'année dernière.

■ **EXERCICE 7 (DANS TON CAHIER) :** Détermine dans ton cahier le nombre de contrôles qui ont été donnés en histoire-géographie.

Règle 3

Pour déterminer un pourcentage à partir d'une proportion, on procède de la manière suivante : par exemple, dans un collège de 585 élèves, 234 font de l'allemand ; quel pourcentage d'élèves font de l'allemand ?

Allemand	234	?
Total	585	100

$$\frac{234 \times 100}{585} = \frac{23\,400}{585} = 40.$$

Il y a donc 40% des élèves de ce collège qui font de l'allemand.

Exemple (RÉSOLU) : Dans une classe de 25 élèves, 19 ont un téléphone portable. Calcule le pourcentage d'élèves ayant un téléphone portable.

Solution :

1. On écrit les données dans un tableau :

Nombres d'élèves ayant un portable	19	
Nombre total d'élèves	25	

2. On complète le tableau en rajoutant 100 comme total (*rappel* : un pourCENTage veut dire "sur 100") :

Nombres d'élèves ayant un portable	19	
Nombre total d'élèves	25	100

3. On calcule grâce à un produit en croix :

$$\frac{19 \times 100}{25} = \frac{1900}{25} = 76$$

4. Conclusion : 76% des élèves possèdent un téléphone portable.

■ **EXERCICE 8 (SUR CE TD) :** Yasmine veut acheter un sweat-shirt qui coûte 48 €. Le vendeur lui fait une remise de 14,40 €. À quel pourcentage du prix initial correspond cette remise ?

Remise en €		
Prix initial		

■ **EXERCICE 9 (SUR CE TD) :** Parmi les 160 élèves d'un collège, 104 sont externes. Calculer le pourcentage d'élèves externes de ce collège.

■ **EXERCICE 10 (DANS TON CAHIER) :** Le prix d'une paire de lunettes de soleil est augmenté de 3,20 €. Son prix initial était de 40 €. À quel pourcentage du prix initial correspond cette augmentation ?

■ **EXERCICE 11 (DANS TON CAHIER) :** Un collège compte 760 élèves dont 266 demi-pensionnaires. Quel est le pourcentage de demi-pensionnaires dans ce collège ?

■ **EXERCICE 12 (DANS TON CAHIER) :** Un jean coûtant 22,60 € est soldé avec une remise de 5,65 €.

1. À quel pourcentage du prix initial correspond cette remise ?
2. Quel est le nouveau prix du jean ?

■ **EXERCICE 13 (DANS TON CAHIER) :**

1. Le corps d'une personne pesant 60 kg contient 36 kg d'eau. Quel est le pourcentage d'eau dans son corps ?
2. Le corps d'une personne de 75 kg contient 65 % d'eau. Quelle est sa masse d'eau (arrondie à l'unité) ?

■ **EXERCICE 14 (DANS TON CAHIER) :** Un pull coûtant 33,50 € est soldé ; son nouveau prix est 26,80 €.

1. Calculer le montant de la remise.
2. À quel pourcentage du prix initial correspond cette remise ?

IV — Représentations graphiques

Nous allons comparer le périmètre et l'aire d'un carré en fonction de la mesure de l'un de ses côtés.

On rappelle déjà que si un côté du carré est noté c , alors : $\mathcal{P}_{\text{carré}} = \dots\dots\dots$ et $\mathcal{A}_{\text{carré}} = \dots\dots\dots$

1. Complète les tableaux ci-dessous :

Côté (cm)	1	2	3	4	5
Périmètre (cm)					

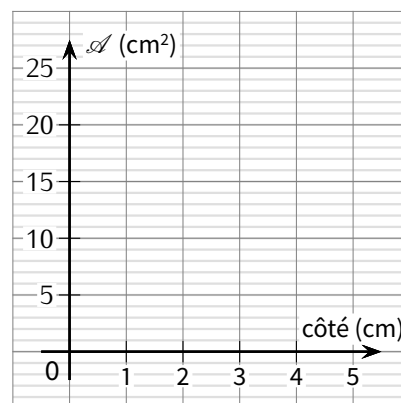
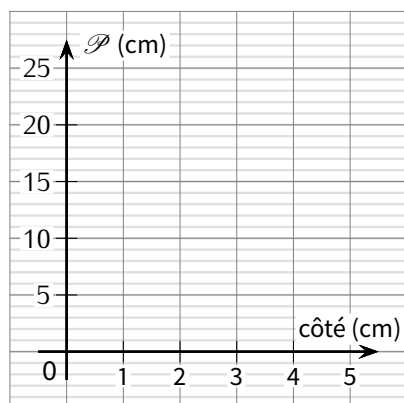
Côté (cm)	1	2	3	4	5
Aire (cm ²)					

2. Est-ce que ces deux tableaux sont des tableaux de proportionnalité ? Justifie la réponse :

★ Tableau du périmètre :

★ Tableau de l'aire :

3. Représente à gauche le graphique qui représente le périmètre du carré en fonction de son côté, et à droite le graphique qui représente l'aire :



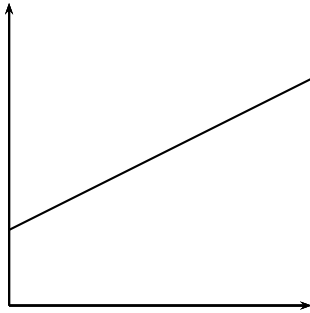
4. Que remarques-tu ?



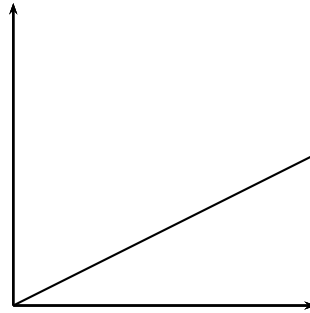
Règle 4

Sur un graphique, on reconnaît une situation de proportionnalité lorsque tous les points forment une droite passant par l'origine.

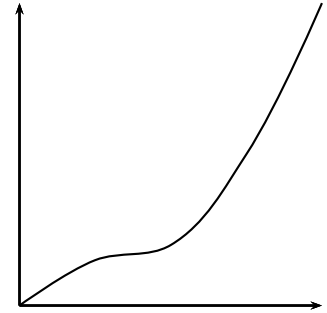
■ **EXERCICE 15 (SUR CE TD) :** Dans chaque cas, détermine si le graphique représente une situation de proportionnalité en cochant la bonne case :



☐ oui – ☐ non



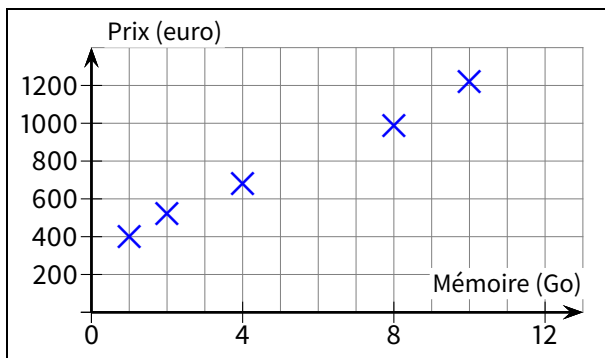
☐ oui – ☐ non



☐ oui – ☐ non

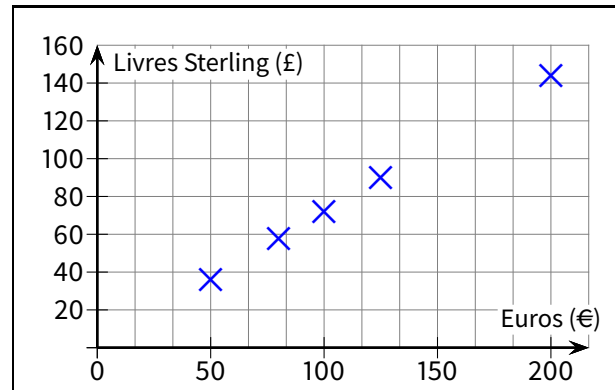
■ **EXERCICE 16 (SUR CE TD) :**

Le graphique ci-dessous indique le prix de cinq ordinateurs en fonction de leur mémoire vive (exprimée en Go).



Le prix est-il proportionnel à la mémoire vive de l'ordinateur ? Explique la réponse.

Dans une banque, des clients ont échangé le même jour des euros (€) en livres sterling (£). Voici le graphique résumant cette situation :



1. Les sommes en € et en £ sont-elles proportionnelles ce jour-là ? Explique.

2. À l'aide du graphique (on laissera les traits de construction), donne le plus précisément possible la valeur de 150 € en £, puis 140 £ en €.



Exercice ① (dans ton cahier)

Calcule les fractions suivantes :

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{11}{14} - \frac{2}{7}$$

$$2 + \frac{5}{10}$$

$$5 \times \frac{2}{3}$$

$$\frac{17}{12} \times \frac{6}{5}$$

$$5 \times \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{8} \right) \times \frac{2}{5}$$

$$\frac{7}{6} - \frac{3}{6} \times \frac{3}{4}$$

$$3 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{11} \times 8$$



Exercice ② (sur ce TD)

Le collège a eu un rabais de 69 € sur une commande qui devait coûter 230 €.

1. Quel est le pourcentage de réduction ?
2. Dans la foulée, le collège fait une autre commande de 125 € sur laquelle une remise de 25% est appliquée. Quel sera le nouveau prix de vente ?



Exercice ③ (sur ce TD)

Calcule :

1. $A = x^2 + x - 1$ pour $x = 10$:
2. $B = x^2 - 3x + 11$ pour $x = 4$:
3. $C = 7x^2 + 12$ pour $x = 1$:



Exercice ④ (dans ton cahier)

Développe les expressions suivantes :

$$A = 7(3 + x)$$

$$B = 2(x - 3)$$

$$C = 5(3 + 8x)$$

$$D = 2(6x + 9)$$

$$E = x(7 + 2x)$$

$$F = 2x(2 - 3x)$$



Exercice ⑤ (sur ce TD)

Réduis les expressions suivantes :

$$A = 5x + 4x$$

$$B = 5ab - 9ab + 3$$

$$C = 5x^2 + 12 - 6x^2$$

$$D = 3 + 4t - 12t - 7t - 3$$

Exercice ⑥ (dans ton cahier)

Soit un cylindre de révolution de hauteur 5 cm, admettant pour base un disque de rayon 1 cm.

1. Construis un patron de ce solide en vraie grandeur.
2. Calcule son volume en cm^3 (on arrondira au dixième).

Exercice ⑦ (dans ton cahier)

Soit un prisme droit de hauteur 2,5 cm ayant pour base un triangle ABC rectangle en C tel que $BC = 3$ cm et $AC = 4,5$ cm.

1. Construis un patron de ce solide en vraie grandeur.
2. Calcule son volume.

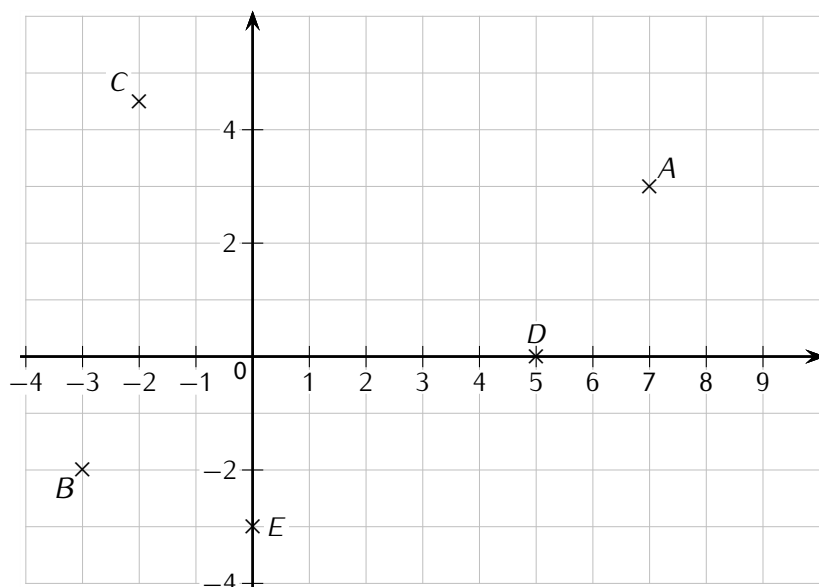
Exercice ⑧ (sur ce TD)

1. Lis les coordonnées des points A, B, C, D et E :

.....

2. Ajoute les points suivants dans le repère ci-contre :

$F(0; 0)$
 $G(3; 4)$
 $H(-2; 0)$
 $I(7; -3)$
 $J(0, 2)$



Exercice ⑨ (sur ce TD)

Nico rentre complètement trempé chez lui après son dernier cours de maths. Il dit : « J'ai marché pendant trois quarts d'heure et il a plu le tiers du temps ! » Pendant combien de temps s'est-il promené *sans* être sous la pluie ?

.....

