Aspects énergétiques : exercices

Exercice 1 :

1. Choisir la bonne réponse :
   (a) Le travail de la force exercée par un opérateur sur l'extrémité d'un ressort qui se déplace de A à B est :
   (a) $W(\overrightarrow{F_{op}}) = \frac{1}{2}k\,(x_B^2 - x_A^2)$ (b) $w(\overrightarrow{F_{op}}) = \frac{1}{2}k\,(x_A^2 - x_B^2)$ (c) $w(\overrightarrow{F_{op}}) = -\frac{1}{2}k\,(x_B^2 - x_A^2)$

   (b) La période de l'énergie cinétique $E_c(t)$ d'un pendule élastique de période propre T_0 est égal à :
   (a) T_0 (b) $\frac{T_0}{2}$ (c) $2T_0$

   (c) En présence de frottements , l'énergie mécanique d'un oscillateur :
   (a) croit (b) décroît (c) reste constante (d) est nulle

   (d) L'énergie mécanique d'un pendule de torsion diminue à cause du :
   (a) couple de rappel (b)frottement (c) moment d'inertie du pendule

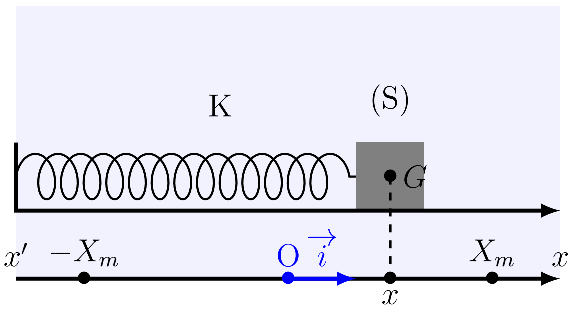
Exercice 2 :

Une balle de flipper de masse $m = 55g$ est propulsée par un ressort de constante de raideur $K = 14N/m$ et de longueur $l_0 = 12cm$.

1. Avant de lancer, le ressort est comprimé et sa longueur est égale à $l_0/2$. Calculer , dans ce cas , l'énergie potentielle élastique E_e emmagasinée par le ressort .
2. Lors du lancer , le ressort se détend et communique à la balle la totalité de l'énergie stockée . Sous quelle forme la balle acquiert-elle cette énergie ?
3. En déduire la vitesse maximale de la balle lors de sa propulsion .

Exercice 3 :

On considère le système mécanique (ressort + solide) de la figure ci-contre ,où la constante de raideur $k = 10N/m$ et $m = 200g$ la masse du solide .Lorsqu'on écarte le solide de sa position d'équilibre de 5cm , puis on l'abandonne sans vitesse initiale ,le système peut osciller entre deux positions A et B d'abscisses X_m et $-X_m$.



L'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G du solide est :

$$x(t) = X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

1. Déterminer les abscisses des postions des points où la vitesse est maximale et nulles .

2. Écrire l'expression de l'énergie cinétique $E_c(t)$ du système au cours de son mouvement .

3. Montrer que l'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme suivante :

$$E_c(t) = \frac{1}{2}kX_m^2\left(1 - cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0^2}\right)\right)$$

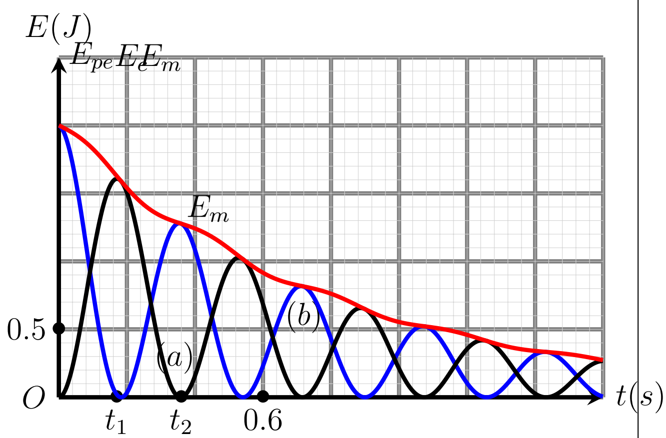
4. En déduire l'expression de l'énergie cinétique en fonction de k,X_m et x

5. Déterminer les abscisse des positions des points où l'énergie cinétique est maximale et nulle . Ce résultat saccorde-t-il avec ceux de la question 2 ? Calculer ces valeurs .

6. L'expression trouvée dans la question 4 est la différence entre deux grandeurs énergétiques , l'une dépend de x et l'autre est constante , à partir de la loi de conservation d'énergie , donner le nom de ces deux grandeurs énergétique.

Exercice 4 :

Un pendule élastique est constitué d'un solide (S) de masse $m = 250g$ fixé à un ressort à spires non jointives , de masse négligeable et de raideur $k = 10N/m$. Le solide peut glisser en effectuant un mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre le long d'une tige horizontale . On étudie le mouvement du centre d'inertie G du solide sur l'axe Ox d'un repère orthonormé lié à un référentielle terrestre supposé Galiléen $\mathscr{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



La position de G est repérée par l'abscisse x.L'origine O du repère coïncide avec la position G_0 de G à l'équilibre. Les forces de frottement sont modélisées par une force unique $\vec{f} = -\mu.\vec{v}$ où μ est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de G .

1. En utilisant le document 1 , déterminer la pseudo -periodique T des oscillations , la comparer à la propre T_0

2. Que représente les courbes (a) et (b) dans le document 1 .

3. Justifier la non conservation de l'énergie mécanique E_m de l'oscillateur .

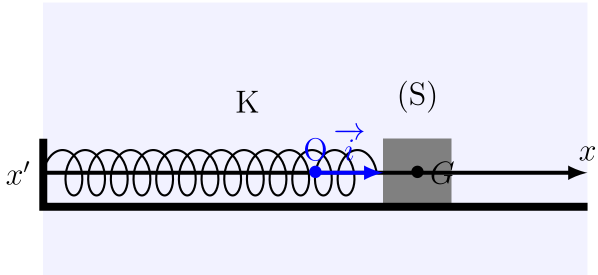
4. (a) Quelle est la vitesse de G aux dates t_1 et t_2 ? Justifier
   (b) En déduire l'intensité f de la force de frottement à ces dates .
   (c) Justifier la forme de la courbe E_m

Exercice 5 :

Tous système mécanique oscillatoire peut effectue un mouvement de va et vient autour de son position d'équilibre stable .

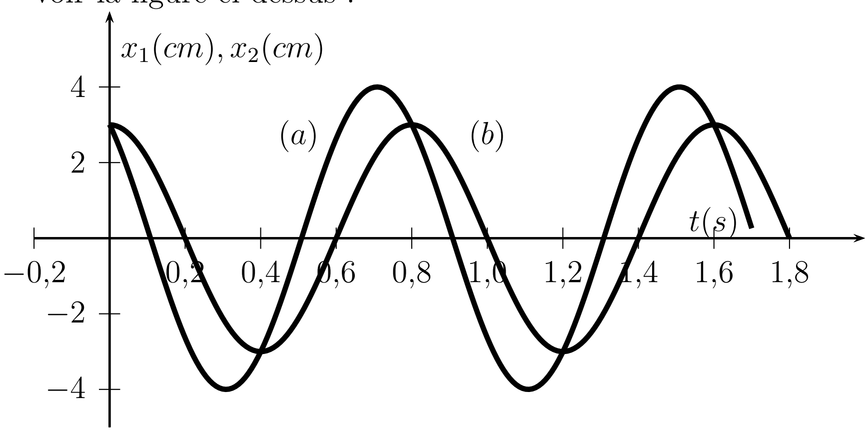
Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse m ,fixé à l'une des extrémités d'un ressort à spires non jointives , de masse négligeable et de constante de raideur k . L'autre extrémité est fixé à un support fixe (voir figure 1) .

À l'équilibre , le centre d'inertie G coïncide avec O l'origine de repère Ox lié au référentielle terrestre supposé Galiléen $\mathscr{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre dans le sens positif , jusqu'à ce que G soit confondu avec un point A distant de d du point O et on considère les deux cas suivants :



* Première cas : on abandonne le solide (S) à partir du point A , sans vitesse initiale , à l'instant $t = 0$
deuxième cas : on lance le solide (S) du point A dans le sens négatif , avec une vitesse $\overrightarrow{v_A}$, à l'instant $t = 0$. Dans les deux cas le système effectue un mouvement oscillatoire autour de sa position déquilibre O .

1. Établir l'équation différentielle du mouvement qui vérifie l'abscisse du centre d'inertie G .
2. Déterminer l'expression littérale de la période propre T_0 de l'oscillateur pour que $x(t) = x_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ soit une solution de cette équation différentielle .
3. À l'aide d'un système convenable , on peut obtenir les courbes d'évolution de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ du centre d'inertie du solide (S) , successivement , dans les deux cas précédentes voir la figure ci dessus :



Préciser , en justifiant votre réponse , la courbe correspondant au mouvement du système oscillatoire dans la première cas .

4. On considère le système oscillatoire dans la deuxième cas , on note x_{2m} l'amplitude de son mouvement et φ_2 sa phase à l'origine des dates .
   (a) À partir de la représentation graphique , déterminer la valeur de d et celle de x_{2m}
   (b) En appliquant la conservation de l'énergie mécanique du système , montrer que l'amplitude x_{2m} peut s'exprimer par la relation suivante :
   $$x_{2m} = \sqrt{\frac{mv_A^2}{k} + d^2}$$
   (c) Trouver l'expression de $tan\varphi_2$ en fonction de d et x_{2m}

Exercice 6 : étude énergétique d'un pendule de torsion

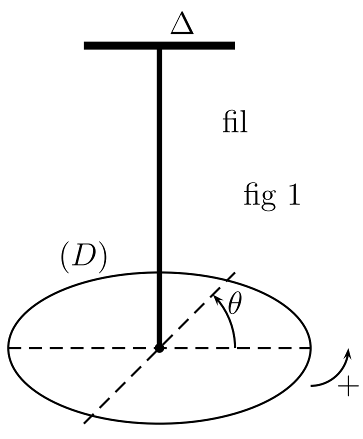
Un pendule de torsion est constitué par disque (D)homogène de rayon $r = 10cm$ horizontale suspendue en son centre O à l'extrémité inférieure d'un fil métallique de masse négligeable et de constante de torsion C dont lextrémité supérieure est relié à un support fixe. Le disque peut donc tourner autour de laxe (Δ) matérialisé par le fil. Cet axe vertical est orienté vers le haut. Le fil exerce sur la barre un couple mécanique de rappel de torsion dont son moment par rapport à Δ est $-C\theta$ où θ est langle de torsion et C la constante de torsion du fil.

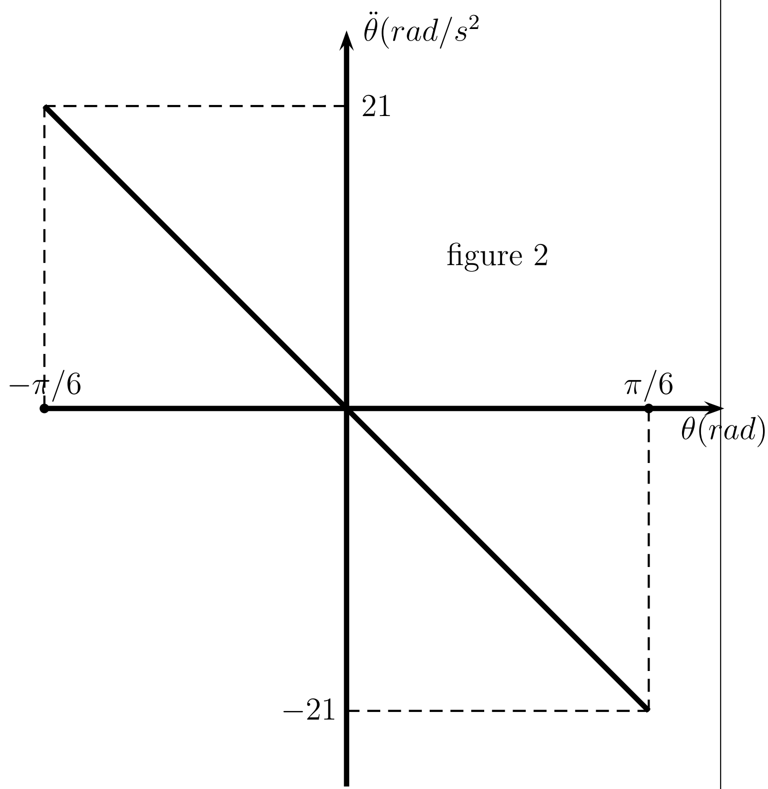
Le système étant au repos , on fait tourner le système d'un angle θ_m de sa position d'équilibre $\theta = 0$ et l'abandonne sans vitesse initiale . le système effectue un mouvement oscillatoire autour de l'axe Δ .

Le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe Δ est $J_\Delta = 9 \times 10^{-3} kg.m^2$.

On considère la position d'équilibre comme un état de référence de l'énergie potentielle de torsion $E_{pt} = 0$.

1. À partir d'une étude énergétique , établir l'équation différentielle du mouvement du disque .
2. La courbe de la figure (2) représente la variation de l'accélération angulaire du disque en fonction de l'abscisse angulaire $\theta(t)$. Déterminer , à partir de la courbe , la valeur de l'amplitude du mouvement θ_m, la période propre T_0 du mouvement de l'oscillatoire . En déduire la valeur de la constante de torsion du fil C
3. Calculer l'énergie mécanique de ce système . On prend $\pi^2 \approx 10$





Exercice 7 : Pendule pesant

On considère un pendule pesant effectuant des oscillations libres avec des frottement négligeables . Le pendule étudié est une tige homogène AB , de masse m et de longueur

$AB = l = 60,0cm$, peut tourner dans un plan vertical autour d'un axe horizontal (Δ) fixe et passe par son extrémité A . (voir figure)

Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Δ) est $J_\Delta = \frac{1}{3}ml^2$.

On étudie le mouvement du pendule dans un repère lié au référentielle terrestre supposé comme Galiléen . On repère , à chaque instant la position du pendule par l'abscisse angulaire θ , c'est l'angle que forme la tige avec la normale passant par le point G_0 . On choisit $E_{pp} = 0$ dans le plan horizontal passant par G à l'équilibre .

On admet que dans le cas des petites oscillations on a $cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ avec θ en radian et on prend $g = 9,80m/s^2$

1. L'équation différentielle du mouvement du pendule :

   (a) Montrer que l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} de la tige peut s'écrire sous la forme suivante :

   $$E_{pp} = mg\frac{l}{2}(1 - cos\theta)$$

   (b) Écrire dans le cas des petites oscillations , l'expression de l'énergie mécanique E_m de la tige à l'instant t , en fonction de m, l, g , θ et $\frac{d\theta}{dt}$.

   (c) En déduire l'équation différentielle du mouvement qui vérifie l'abscisse angulaire θ dans le cas des petites oscillations .

2. Étude énergétique
   À partir de la position d'équilibre stable , on lance la tige avec une vitesse initiale qui lui fournit une énergie mécanique E_m . Le graphe de la figure 2 donne l'évolution de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} et l'énergie mécanique E_m de la tige AB dans deux expérience différentes de tel façon que dans chaque cas on lance la tige AB de sa position d'équilibre stable avec une vitesse initiale donnée où elle reçoit deux énergies mécaniques différentes .
   Dans l'expérience 1 : $E_m = E_{m1}$
   Dans la deuxième expérience : $E_m = E_{m2}$

   (a) En utilisant le graphe de la figure (2) , déterminer la nature du mouvement de la tige AB dans chaque expérience .

   (b) déterminer , graphiquement , la valeur maximale de l'abscisse angulaire du pendule dans l'expérience 1 . En déduire la masse de la tige .

   (c) Au cours de l'expérience 2 , l'énergie cinétique de la tige varie entre deux valeurs $E_{c,min}$ et $E_{c,max}$? déterminer ces deux valeurs .

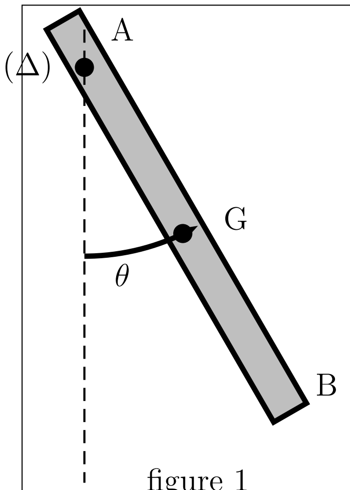
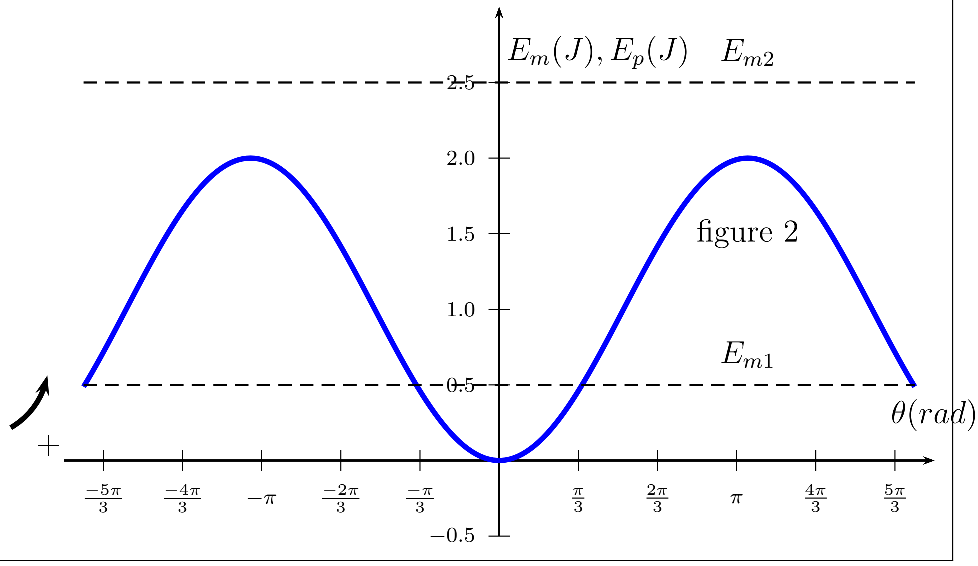


figure 1

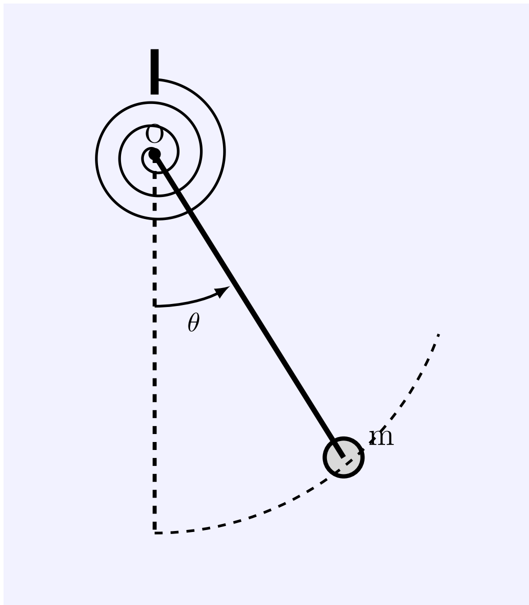


Exercice 8 :

Une tige OB de masse négligeable , porte un solide pratiquement ponctuel à son extrémité B :

$$OB = b = 20cm$$

Elle peut osciller dans un plan vertical autour d'un axe horizontal passant par O , perpendiculairement au plan de la figure . Elle est soumise à l'action du champs de pesanteur et à celle d'un ressort spiral dont la constante de torsion est C . (l'action du ressort spiral est la même que celle d'un fil de torsion ayant la constante de torsion C)
Initialement , la tige est immobile , verticale , et le ressort spiral est détendu .



On considère , à chaque instant l'élongation angulaire de la tige est θ et le plan horizontal passant par son centre d'inertie G_0 comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur $(E_{pp} = 0)$ et lorsque le ressort est détendu est l'état de référence de l'énergie potentielle de torsion $E_{pt} = 0$.
Le moment d'inertie du système est $J_\Delta = mb^2$.

1. Déterminer l'énergie mécanique reçu par le système (ressort spiral + tige +Terre) quand la tige est écartée de l'angle α de sa position d'équilibre et maintenue immobile .
2. On écarte la tige de sa position d'équilibre d'un angle θ_m et on l'abandonne sans vitesse initiale . Montrer que l'énergie mécanique du système à un instant donné est :

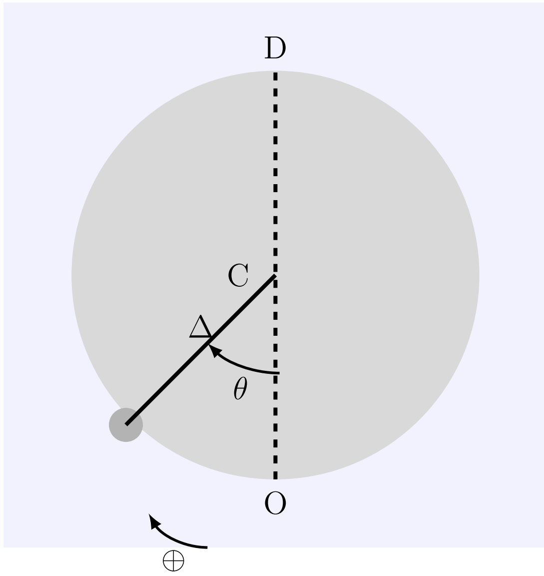
$$E_m = mgb(1 - cos\theta) + \frac{1}{2}C\theta^2 + \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2$$

3. On suppose l'angle θ petit , ce qui permet d'écrire en première approximation $cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$.

Déduire des résultats précédents l'équation différentielle du mouvement et la période des petites oscillations .

Exercice 9 :

On considère un disque (D) homogène de masse $M = 0,40kg$ et de rayon $r = 0,1m$ qui peut tourner sans frottement autour d'un axe fixe (Δ) horizontal et perpendiculaire au plan vertical du disque (D) et qui passe par son centre d'inertie.
Le moment d'inertie du disque par rapport à (Δ) est $J_\Delta = \frac{1}{2}Mr^2$. On fixe en un point A de la périphérie du disque un corps solide (B) de dimension négligeable et de masse $m = M/4$.
Le moment d'inertie du système (S_1)=(disque (D) + masse B) par rapport à l'axe (Δ) est $J = J_\Delta + mr^2$.



1. On écarte le système (S_1) à partir de sa position d'équilibre stable d'un faible angle θ_1 en sens positif et on l'abandonne sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des dates .

   À chaque instant on repère la position de corps B par l'abscisse angulaire $\theta = \widehat{CA, CO}$. Voir figure .

   (a) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique , montrer que l'équation différentielle du mouvement du système (S_1) est la suivante :
   $$\ddot{\theta} + \frac{g}{3r}\theta = 0$$
   avec g l'intensité de pesanteur .

   (b) la solution de cet équation différentielle est de la forme suivante : $\theta(t) = \theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}T + \varphi\right)$.
   Déterminer l'expression de la période propre du mouvement . et calculer sa valeur ; On donne $g = 10m/s^2$

   (c) Écrire l'équation horaire du mouvement en fonction de θ_1 et t .

2. On prend le plan horizontal passant par O comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur pour le système S_1, $E_{pp} = 0$.

   (a) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du système en fonction de t, T_0, g, θ_1,r, et m . on prend en considération l'approximation suivante : $1 - cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2}$.

   (b) Montrer que l'expression de l'énergie cinétique du système s'écrit de la forme suivante : $E_c = \frac{3}{2}mv^2$ où v est la vitesse linéaire du corps solide B à l'instant t .

(c) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de g, θ_1, r, et m

(d) En déduire la valeur de θ_1 sachant que la valeur maximale de l'énergie cinétique E_c du système est $E_{cmax} = 1,23 \times 10^{-3} J$

Exercice 10 :

Un oscillateur harmonique est un oscillateur idéal , on décrit son évolution au cours du temps par une fonction sinusoïdale , sa fréquence ne dépend que des caractéristiques du système mécanique . L'importance de ce modèle c'est qu'il nous permet de décrire l'évolution d'un système mécanique oscillatoire autour de sa position d'équilibre .

On considère un ressort de constante de raideur K ,de spires non jointives et de masse négligeable suspendu à un support fixe . On suspend dans l'autre extrémité libre de ce ressort un corps solide (S) de masse (m) . Soit Δl_0 l'allongement du ressort lorsque le solide (S) est en équilibre .

On repère la position (S) par un axe Oy orienté vers le haut et d'origine confondu avec avec la position du centre d'inertie du corps (S) à l'équilibre .

Données : $\Delta l_0 = 10,0cm$; l'intensité de pesanteur $g = 9,81 N/kg$.

I. Étude dynamique On écarte (S) verticalement vers le bas d'une distance d ($d < \Delta l_0$) et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$ on le choisit comme origine des dates . Le solide effectue des oscillations verticales autour de sa position d'équilibre .

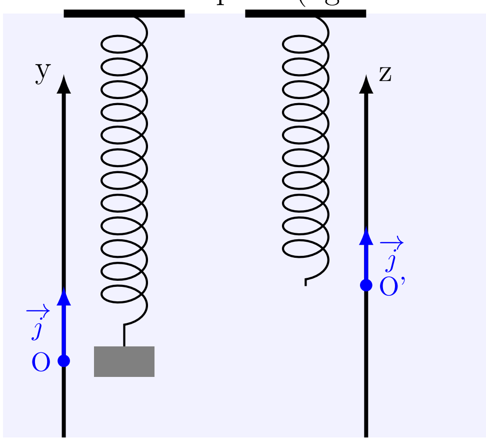
1. Déterminer à l'équilibre l'expression de K en fonction de m, g , et Δl_0 ;
2. En appliquant la deuxième loi de Newton , montrer que l'équation différentielle qui vérifie l'abscisse y s'écrit sous la forme suivante :
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{K}{m} y = 0$$
3. La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme :
$$y = y_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$
? Déterminer les valeurs de φ et T_0.
4. Soit F l'intensité de la tension du ressort , choisir la réponse juste :
Lorsque l'abscisse $y > 0$, on a
(a) $F > mg$ (b) $F = mg$ (c) $F < mg$

II. Étude énergétique

On fait le repérage de la position du solide à partir de deux repères (figure ci contre) :

* Le repère (1) : l'origine O' de l'axe se coïncide avec l'extrémité libre du ressort avant de lui suspendre le solide (S) et l'axe Oz vertical et orienté vers le haut .
On prend comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = 0$ au point O'

* Le repère (2) : L'origine O de l'axe se coïncide avec la position du centre d'inertie du solide (S) à l'équilibre et l'axe Oy vertical dirigé vers le haut .



repère 1 repère 2

On prend comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = 0$ au point O .
On prend comme état de référence de l'énergie potentielle élastique du ressort $E_{pe} = 0$ lorsque le ressort n'est pas déformé .

(a) On écarte (S) de sa position d'équilibre vers le bas d'une distance de d ; $(d < \Delta l_0)$ et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$ choisi comme origine des dates ? le pendule effectue des oscillations verticales autour de sa position d'équilibre
Écrire l'expression de de l'énergie mécanique de l'oscillateur :
   i. Dans le repère de (1) en fonction z,m,K , g et v la vitesse du centre d'inertie G de (S) .
   ii. Dans le repère de (2) en fonction y,m,K , Δl_0 et v la vitesse du centre d'inertie G de (S) .
   iii. Dans quel repère l'énergie mécanique de l'oscillateur ne dépend pas de l'énergie potentielle de pesanteur ?

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre verticalement vers le bas d'une distance $d = 2cm$ et on le lance vers le haut avec un vitesse initiale $\vec{v}_0$; Le solide (S) effectue des oscillation verticales autour de sa position d'équilibre et d'amplitude $D = 7cm$
Sachant que l'énergie mécanique de l'oscillateur se conserve au cours du temps , déterminer l'expression de v_0 en fonction de g,Δl_0 , d et D . Calculer la valeur de v_0.