

## EXERCICE 1

Les oscillateurs mécaniques sont employés dans différents secteurs industriels et quelques appareils de sports et les jeux et autres . Parmi ces oscillateurs n la balançoire qu'on considère comme pendule .

Un enfant se balance à l'aide d'une balançoire constituée d'une barre qu'il utilise comme siège , suspendue par deux cordes fixées à un support fixe .

On modélise le système { enfant + balançoire } par un pendule simple composé d'un fil , inextensible de masse négligeable et de longueur  $L$  , et un corps (S) de masse  $m$  .

Le peut tourner autour d'un axe fixe horizontal ( $\Delta$ ) perpendiculaire au plan vertical . Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) est  $J_{\Delta} = m.L^2$  .

### Données :

- Intensité de la pesanteur :  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  ; longueur du fil :  $L = 3 \text{ m}$  ; masse du corps (S) :  $m = 18 \text{ kg}$  .

O prend dans le cas de petites oscillations :  $\sin\theta \approx \theta$  et  $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$  (rad) .

On néglige les dimensions du corps (S) par rapport à la longueur du fil et tous les frottements .

### 1- Étude dynamique du pendule :

On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle  $\theta_m = \frac{\pi}{20}$  dans le sens positif et le libère sans vitesse initiale à l'instant  $t = 0$  .

On repère la position du pendule à un instant  $t$  par l'abscisse angulaire  $\theta$  défini entre le pendule et la verticale passant par le point O tel que  $\theta = (\overrightarrow{OM_o}, \overrightarrow{OM})$  (voire figure )

1-1- Montrer en utilisant la relation fondamentale de la dynamique de rotation autour d'un axe fixe , que l'équation différentielle du mouvement du pendule dans un référentiel galiléen lié à la Terre s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

- 1-2- Calculer la période propre  $T_0$  du pendule .  
 1-3- Écrire l'équation horaire du mouvement du pendule .  
 1-4- En appliquant la deuxième loi de Newton dans la base de Frenet , trouver l'expression de la tension du fil  $T$  à un instant  $t$  en fonction de  $m$  ,  $g$  ,  $\theta$  ,  $L$  et  $v$  la vitesse linéaire du pendule simple . Calculer la valeur de  $T$  à l'instant  $t = \frac{T_0}{4}$  .

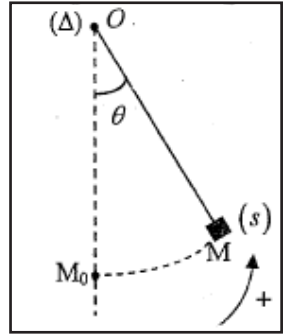
## 2- Étude énergétique:

On fournit au pendule qui est immobile dans sa position d'équilibre stable une énergie cinétique de valeur  $E_c = 264,6 \text{ J}$  , et il tourne dans le sens positif .

2-1- On choisit le plan horizontal passant par le point  $M_0$  comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur (voir figure) .

Écrire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_p$  du pendule à l'instant  $t$  en fonction de  $\theta$  ,  $m$  ,  $L$  et  $g$  .

2-2- En se basant sur l'étude énergétique , déterminer la valeur maximale  $\theta_{\max}$  de l'abscisse angulaire .



## EXERCICE 2

L'homme a utilisé la montre pour mesurer le temps depuis longtemps , et a inventé différents types de montres , comme la montre solaire , la montre à eau et le sablier ... jusqu'à ce Huygens fabriqua la première montre murale en 1657 .

Ce type de montres est basé sur une balançoire qu'on modélise dans cette étude par un pendule pesant effectuant des petites oscillations libres sans frottements .

Le pendule étudié est composé d'une barre homogène  $AB$  , sa masse  $m = 0,203 \text{ kg}$  , sa longueur  $AB = L = 1,5 \text{ m}$  , mobile dans un plan vertical autour d'un axe horizontal  $(\Delta)$  fixe passant son extrémité  $A$  (figure 1).

On étudie dans un repère lié à un référentiel terrestre supposé galiléen .

On repère , à chaque instant  $t$  , la position du pendule par son abscisse angulaire  $\theta$  .

On donne le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation  $(\Delta)$  :  $\frac{1}{3} . m . L^2$  .

On admet dans le cas des petites oscillations que :  $\sin \theta \approx \theta$  avec  $\theta$  en radian .

On note  $g$  l'intensité de la pesanteur .

On écarte le pendule pesant de sa position d'équilibre stable d'un petit angle  $\theta_m$  dans le sens positif et on le lâche sans vitesse initiale à l'instant pris comme origine des dates .

### 1- Étude dynamique du pendule pesant

1-1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique de rotation , établir l'équation différentielle du mouvement du pendule .

1-2- Déterminer la nature du mouvement du pendule pesant et écrire l'équation horaire  $\theta(t)$  en fonction de  $t$  ,  $\theta_m$  et la période propre  $T_0$  .

1-3- Montrer que l'expression de la période propre de ce pendule est :  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

1-4- Calculer la longueur  $l$  du pendule simple synchrone avec le pendule pesant étudié .

### 2- Étude énergétique du pendule pesant

On choisit le plan horizontal passant par  $G_0$  , la position du centre d'inertie  $G$  de la barre  $AB$  à l'équilibre stable , comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur (  $E_{pp}(0) = 0$  ) .

La figure 2 représente les variations de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}(\theta)$  du pendule étudié en fonction du temps dans l'intervalle  $[-\theta_m , \theta_m]$  .

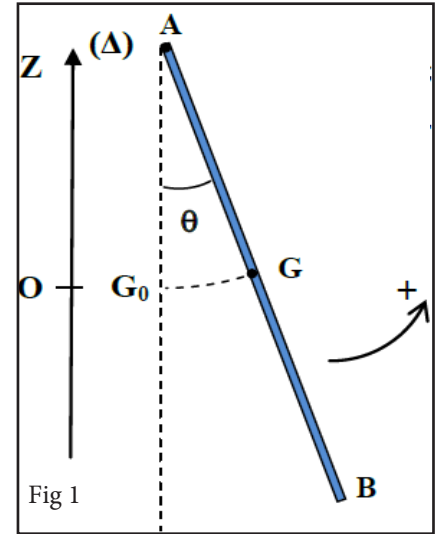


Fig 1

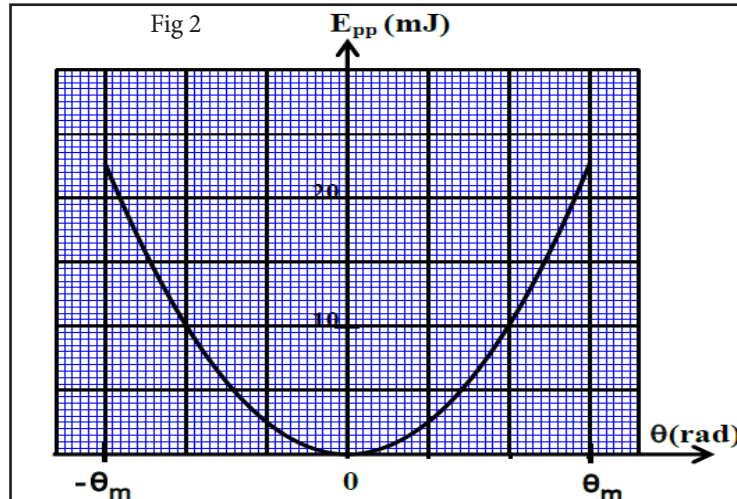


Fig 2

En exploitant le diagramme d'énergie :

2-1- Déterminer la valeur de l'énergie mécanique  $E_m$  du pendule .

2-2- Trouver la valeur absolue de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  du pendule au passage par la position d'abscisse angulaire  $\theta = \frac{2}{3} \theta_m$  .

## EXERCICE 3

### Première partie : étude énergétique du mouvement d'un pendule simple

Pour étudier quelques lois physiques régissant le mouvement d'un pendule simple , qui est considéré comme un cas particulier du pendule pesant , une professeur et ses élèves ont utilisé un pendule simple constitué de :

- Fil inextensible de longueur  $L$  et de masse négligeable .

- Une bille de dimensions négligeables et de masse  $m = 0,1 \text{ kg}$  .

- Caméra numérique et un dispositif informatique adéquat .

À l'instant  $t = 0$  , un des élèves a écarté la bille de sa position d'équilibre stable d'un angle petit  $\theta_m$  et l'a libéré sans vitesse initiale . Une

élève a filmé la bille pendant son mouvement à l'aide de la caméra .

Le mouvement du pendule a lieu dans un plan vertical autour d'un axe horizontal ( $\Delta$ ) passant par l'extrémité O du fil .

$\theta$  représente l'abscisse angulaire du pendule à l'instant t .(Figure 2)

## Données :

- Tous les frottements sont négligeables .
- L'intensité de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  .
- On choisit le plan horizontal passant par la position de la bille à l'équilibre stable du pendule comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}$  .

L'étude est faite dans un référentiel terrestre supposé galiléen .

La professeur a traité les données du film enregistré à l'aide du dispositif informatique , et a obtenu les deux courbes représentées sur la figure 3 représentant les variations de l'abscisse angulaire  $\theta$  et de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}$  en fonction du temps .

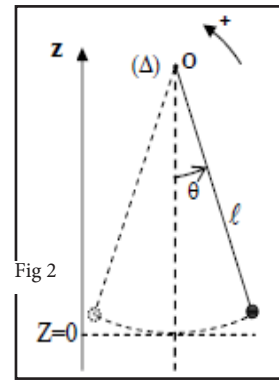


Fig 2

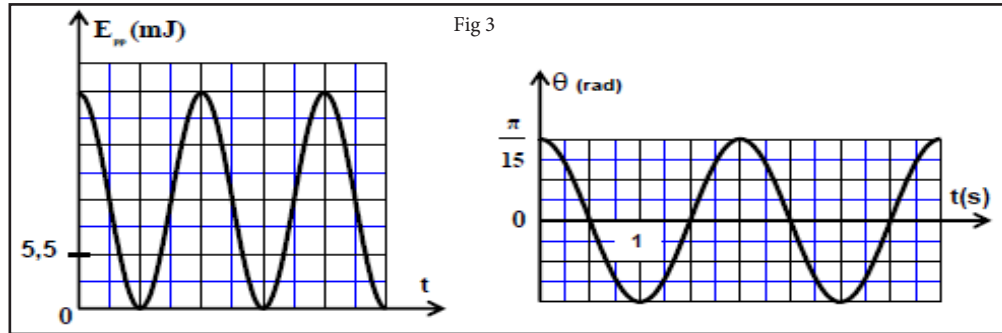


Fig 3

- 1- Déterminer graphiquement l'angle maximal  $\theta_m$  et la période propre  $T_0$  .
- 2- Parmi les deux expressions suivantes :  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$  et  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  , choisir l'expression juste de la période propre en se basant sur l'équation au dimensions .
- 3- Calculer la longueur L du pendule étudié .
- 4- En exploitant le diagramme d'énergie , déterminer :
  - 4-1- L'énergie mécanique  $E_m$  du pendule simple .
  - 4-2- La valeur absolue de la vitesse linéaire de la bille au moment de son passage par la position d'équilibre stable .

## EXERCICE 4

Le gravimètre est un appareil qui permet de déterminer, avec une grande précision, la valeur  $deg$  ; valeur d'intensité du champ de pesanteur en un lieu donné.

Les domaines d'utilisation des gravimètres sont nombreux : la géologie, l'océanographie, la sismologie, l'étude spatiale, la prospection minière....etc.

On modélise un type de gravimètres par un système mécanique oscillant constitué de :

- une tige AB, de masse négligeable et de longueur L, pouvant tourner dans un plan vertical autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) horizontal passant par l'extrémité A ;
- un corps solide (S), de masse m et de dimensions négligeables, fixé à l'extrémité B de la tige ;
- un ressort spiral, de constante de torsion C, qui exerce sur la tige AB un couple de rappel de moment  $M_c = -C.\theta$  ; où  $\theta$  désigne l'angle que fait AB avec la verticale ascendante  $Ay$ . (figure1)

On étudie le mouvement de ce système mécanique dans un repère orthonormé ( $A, i, j$ ) lié à un référentiel terrestre considéré comme galiléen.

## Données :

- masse du solide (S) :  $m=5.10^{-2} \text{ kg}$  ;
- longueur de la tige :  $L=7.10^{-1} \text{ m}$  ;
- constante de torsion du ressort spiral :  $C=1,31 \text{ N.m.rad}^{-1}$  ;
- expression du moment d'inertie du système par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) :  $J_A = m.L^2$  ;
- pour les angles faibles :  $\sin\theta \approx \theta$  et  $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$  avec  $\theta$  en radian .

On écarte le système mécanique de sa position d'équilibre vertical d'un angle petit max  $\theta$  dans le sens positif puis on le lâche sans vitesse initiale à un instant  $t=0$ .

Le système est repéré, à chaque instant t, par son abscisse angulaire  $\theta$  .

On néglige tous les frottements.

## 1- Étude dynamique

1-1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation autour d'un axe fixe, montrer que l'équation différentielle du mouvement du système étudié s'écrit, pour les faibles oscillations, sous la forme :  $\ddot{\theta} + (\frac{C}{m.L^2} - \frac{g}{L}).\theta = 0$

1-2- En utilisant les équations aux dimensions, déterminer la dimension de l'expression  $(\frac{C}{m.L^2} - \frac{g}{L})$  .

1-3- Pour que la solution de l'équation différentielle précédente soit sous la forme :  $\theta(t) = \theta_{\max} . \cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi)$ , il faut que la constante de torsion C soit supérieure à une valeur minimale  $C_{\min}$  . Trouver l'expression de  $C_{\min}$  en fonction de L , m et g .

1-4- La courbe de la figure 2 représente l'évolution de l'abscisse angulaire  $\theta(t)$  dans le cas où  $C > C_{\min}$  .

1-4-1- Déterminer la période T , l'amplitude  $\theta_{\max}$  et la phase à l'origine  $\varphi$  .

1-4-2- Trouver l'expression de l'intensité de pesanteur g en fonction de L , m, C et T . Calculer sa valeur . (on prend  $\pi=3,14$  ) .

## 2- Étude énergétique

Un système d'acquisition informatisé a permis de tracer la courbe de la figure 3, qui représente les variations de l'énergie cinétique C E du système étudié en fonction de l'abscisse angulaire  $\theta$  dans le cas de faibles amplitudes.

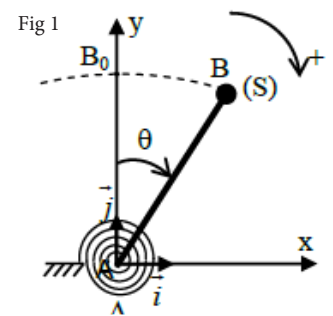


Fig 1

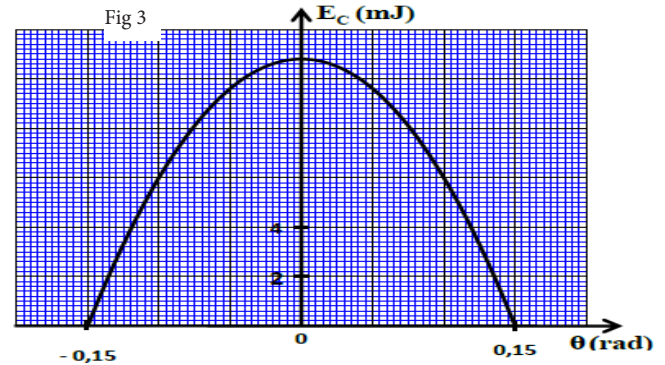
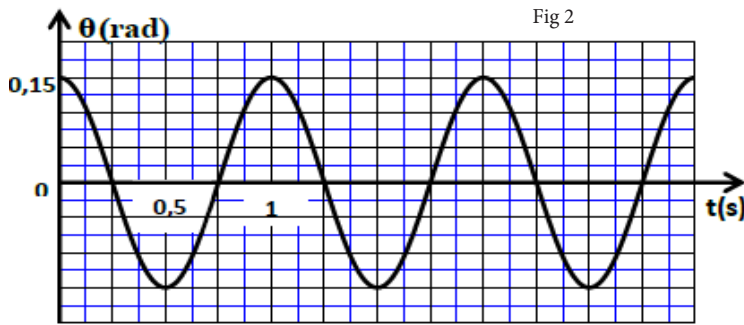
On choisit le niveau horizontal passant par  $B_0$  comme état de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur ( $E_{pp} = 0$ ), et on choisit l'énergie potentielle de torsion nulle ( $E_{pt} = 0$ ) pour  $\theta = 0$ .

En exploitant la courbe de la figure 3, déterminer :

2-1- la valeur de l'énergie mécanique  $E_m$  du système étudié.

2-2- la valeur de l'énergie potentielle  $E_p$  du système à la position  $\theta_1 = 0,10$  rad.

2-3- la valeur absolue de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  du système à l'instant de son passage par la position  $\theta = 0$ .



## EXERCICE 5

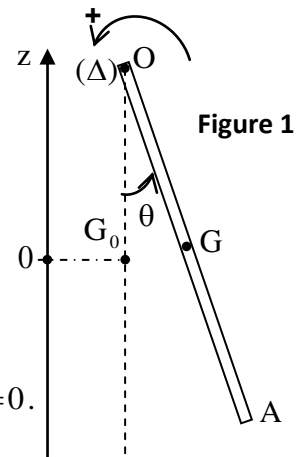
Cette partie vise la détermination de l'intensité de la pesanteur, en un lieu donné, ainsi que quelques grandeurs qui sont liées au mouvement d'un pendule pesant.

Un pendule pesant est constitué d'une tige homogène  $OA$  de masse  $m$ , de centre d'inertie  $G$  et de longueur  $L$  pouvant effectuer un mouvement de rotation dans un plan vertical autour d'un axe horizontal  $(\Delta)$  passant par son extrémité  $O$  (figure 1). Soit  $J_\Delta$  le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe  $(\Delta)$ . On étudie le mouvement du pendule dans un repère lié à un référentiel terrestre supposé galiléen.

On écarte la tige  $OA$  de sa position d'équilibre stable d'un petit angle  $\theta_0$ , dans le sens positif, puis on la lance avec une vitesse angulaire initiale à l'instant de date  $t=0$ .

On repère la position du pendule à un instant de date  $t$  par l'abscisse angulaire  $\theta$ . Le centre  $G$  est confondu avec  $G_0$  quand le pendule passe par sa position d'équilibre stable (figure 1).

On néglige tous les frottements et on choisit le plan horizontal passant par  $G_0$  comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur ( $E_{pp} = 0$ ).



**Données :** - La masse de la tige :  $m=100$  g ; - La longueur de la tige :  $L=0,53$  m ;

- L'expression du moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe  $(\Delta)$  :  $J_\Delta = \frac{1}{3} m.L^2$  ;

- Pour les petits angles :  $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$  où  $\theta$  est exprimé en radian ; - On prendra :  $\pi^2 = 10$ .

1-Trouver l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du pendule pesant à un instant  $t$ , dans le cas des oscillations de faible amplitude, en fonction de  $\theta$ ,  $L$ ,  $m$  et  $g$  intensité de la pesanteur.

2- Par une étude énergétique, montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit :  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2L}\theta = 0$ .

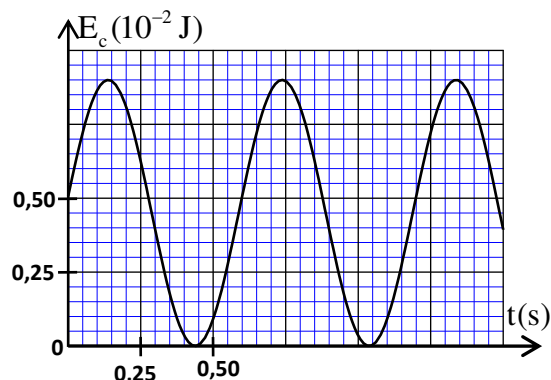
3- La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :  $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$  où  $T_0$  est la période propre du pendule.

La courbe de la figure 2 représente l'évolution de l'énergie cinétique du pendule étudié au cours du temps.

3-1-Déterminer la valeur de l'intensité de pesanteur  $g$ .

3-2-Trouver la valeur de l'amplitude  $\theta_m$  du mouvement.

3-3-Déterminer la valeur de  $\varphi$ .



## EXERCICE 6

L'objectif de cette partie est la détermination de la position du centre d'inertie G d'un système oscillant et son moment d'inertie  $J_{\Delta}$  à l'aide d'une étude énergétique et dynamique.

Un pendule pesant de centre d'inertie G, est constitué d'une barre AB de masse  $m_1 = 100\text{g}$  et d'un corps (C) de masse  $m_2 = 300\text{g}$  fixé à l'extrémité B de la barre.

Le pendule pesant peut tourner autour d'un axe fixe horizontal ( $\Delta$ ) passant par l'extrémité A (fig2). Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) est  $J_{\Delta}$ .

$AG = d$  est la distance entre le centre d'inertie et l'axe de rotation.

On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle  $\theta_m$  petit et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps ( $t = 0\text{s}$ ), le pendule effectue alors un mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre.

On considère que tous les frottements sont négligeables et on choisit le plan

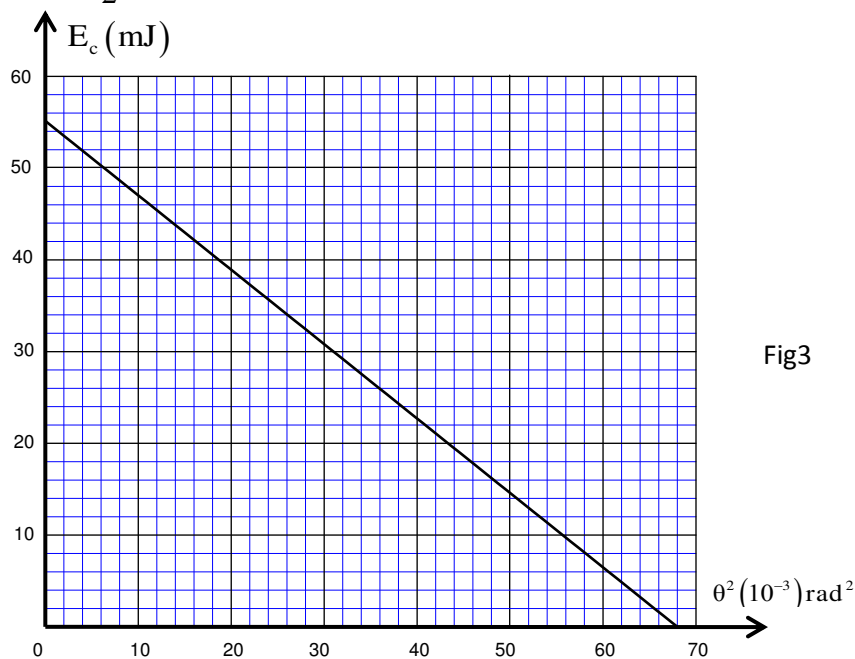
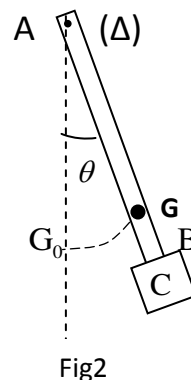
Horizontal passant par le point  $G_0$ , position de G à l'équilibre stable, comme état de référence de

l'énergie potentielle de pesanteur ( $E_{pp} = 0$ ). On repère à chaque instant la position du pendule pesant par son abscisse angulaire  $\theta$  formé par la barre et la ligne verticale passant par le point A, on note

$\frac{d\theta}{dt}$  la vitesse angulaire du pendule pesant à un instant t.

La figure 3 représente la courbe de l'évolution de l'énergie cinétique  $E_c$  du pendule pesant en fonction du carré de l'abscisse angulaire  $\theta^2$ .

on prend  $\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2}$  et  $\sin(\theta) \approx \theta$  avec  $\theta$  en radian. L'intensité de la pesanteur est  $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$ .



### 1. Détermination de la position du centre d'inertie G du système

1-1 Soit  $E_m$  l'énergie mécanique du pendule pesant dans le cas de petites oscillations ;

Montrer que  $\frac{E_m}{\theta_m^2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot g \cdot d}{2}$ .

1-2 A l'aide du graphe de la figure 3, déduire la valeur de d.

### 2. Détermination du moment d'inertie $J_{\Delta}$

2-1 Trouver en appliquant la relation fondamentale de la dynamique, l'équation différentielle du mouvement du pendule pesant.

2-2 Trouver l'expression de la fréquence propre  $N_0$  de ce pendule en fonction de  $J_{\Delta}$ ,  $m_1$ ,  $g$ ,  $m_2$  et d pour que la solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme  $\theta(t) = \theta_m \cos(2\pi N_0 t + \varphi)$ .

2-3 Sachant que la valeur de la fréquence propre est  $N_0 = 1\text{Hz}$ . Calculer  $J_{\Delta}$ .



## EXERCICE 7

Le pendule pesant est un système mécanique qui peut effectuer un mouvement de rotation oscillatoire autour d'un axe fixe horizontal ne passant pas par son centre d'inertie; sa période propre dépend de l'accélération de la pesanteur.

L'objectif de cette partie est l'étude de l'effet de l'accélération de la pesanteur sur la période propre d'un pendule pesant dans le cas de faibles oscillations.

Le pendule pesant représenté sur la figure 1 est constitué d'un disque de masse  $m_1$ , fixé à l'extrémité inférieure A d'une tige OA de masse  $m_2$  avec  $m_1 + m_2 = 200g$ .

Le pendule pesant peut effectuer un mouvement de rotation oscillatoire autour d'un axe fixe  $(\Delta)$  horizontal passant par l'extrémité O de la tige.

Le centre d'inertie G du pendule pesant est situé sur la tige à une distance  $OG=d=50\text{ cm}$  de O.

Le moment d'inertie du pendule pesant par rapport à l'axe  $(\Delta)$  est  $J_A=9,8.10^{-2}\text{ kg.m}^2$ . On néglige tous les frottements.

On prend pour les petits angles :  $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$  et  $\sin \theta \approx \theta$  avec  $\theta$

en radian. Et on prend  $\pi^2=10$

1- Au niveau de la mer où l'accélération de la pesanteur est  $g_0 = 9,8\text{ m.s}^{-2}$ ,

on écarte le pendule pesant de sa position d'équilibre stable d'un angle  $\theta_0 = \frac{\pi}{18}\text{ rad}$  et on le libère sans vitesse initiale à l'instant  $t=0$ . On repère à chaque instant la position du pendule pesant par l'abscisse angulaire  $\theta$  mesurée à partir de sa position d'équilibre stable (figure 1).

1.1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique relative à la rotation du pendule pesant, déterminer l'équation différentielle que vérifie l'angle  $\theta$  dans le cas de faibles oscillations.

1.2- Trouver, en fonction de  $J_A$ ,  $d$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  et  $g_0$  l'expression de la période propre  $T_0$  du pendule pour que la solution de l'équation différentielle soit  $\theta = \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ . Calculer  $T_0$ .

1.3- En appliquant la deuxième loi de Newton et en utilisant la base de Freinet  $(\vec{G}, \vec{u}, \vec{n})$  (figure 2), trouver l'expression de l'intensité R de la force exercée par l'axe  $(\Delta)$  sur le pendule pesant au moment de passage du pendule par sa position d'équilibre stable en fonction de  $m_1, m_2, d, g_0, \theta_0$ , et  $T_0$ . Calculer R.

2- Dans une région montagneuse où l'accélération de la pesanteur est  $g=9,78\text{ m.s}^{-2}$ , la période propre du pendule pesant augmente de  $\Delta T$ .

Pour corriger le décalage temporel  $\Delta t$ , on utilise un ressort spiral équivalent à un fil de torsion dont la constante de torsion est C.

On relie l'une des extrémités du ressort spiral à l'extrémité O de la tige et on fixe l'autre extrémité du ressort à un support fixe de telle façon que le ressort spiral soit non déformé lorsque le pendule pesant est dans sa position d'équilibre stable (figure3).

On choisit le niveau horizontal passant par  $G_0$  centre d'inertie du pendule pesant dans sa position d'équilibre stable, comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur et la position dans laquelle le ressort spiral est non déformé, comme référence de l'énergie potentielle de torsion. le point  $G_0$  correspond à l'origine du repère  $O'z$  orienté vers le haut (figure 3).

2.1- Montrer dans le cas de petites oscillations et à une date t, que l'énergie mécanique de l'oscillateur ainsi constitué s'écrit sous la forme :  $E_m = a.\dot{\theta}^2 + b.\theta^2$  en précisant les expressions de a et de b en fonction des données utiles de l'exercice.

2.2- En déduire l'équation différentielle du mouvement que vérifie l'angle  $\theta$  en fonction de a et b.

2.3- Trouver l'expression de la constante de torsion C qui convient à la correction du décalage temporel  $\Delta T$  en fonction de  $m_1, m_2, d, g$ , et  $g_0$ . Calculer C.

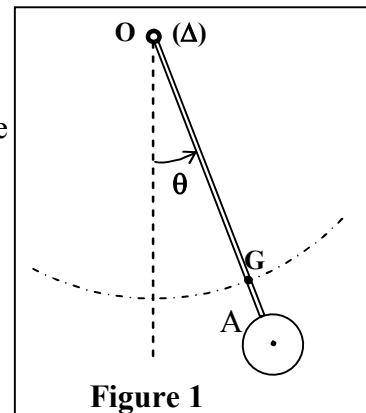


Figure 1

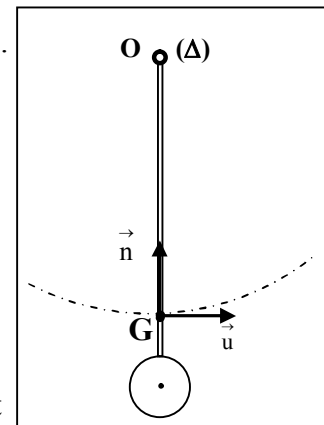


Figure 2

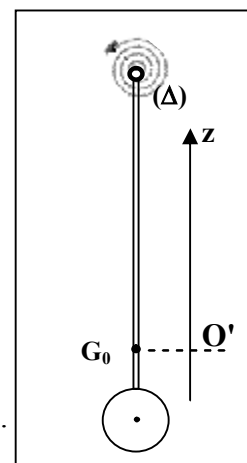


Figure 3