

**Systèmes mécaniques oscillants : exercices****Exercice 1 :**

1. Définir les notions suivantes :

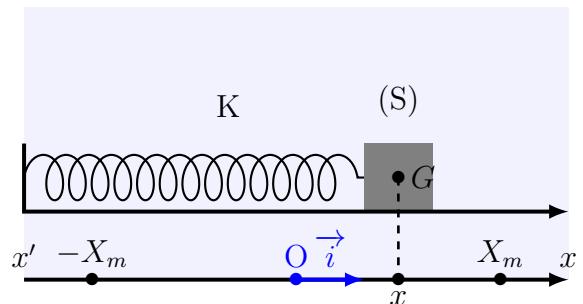
Oscillateur mécanique - mouvement oscillatoire - oscillation libre - amplitude de mouvement - élongation du mouvement - période propre - amortissement des oscillations mécaniques - oscillations forcées - oscillations entretenues - pendule élastique - pendule pesant - pendule simple - pendule de torsion .

2. Choisir la bonne réponse :

- (a) Plus la raideur d'un ressort est grande , plus la période du pendule élastique horizontal est :
  - (a) grande
  - (b) petite
- (b) La formule de la période des oscillations du pendule élastique horizontal n'est valable que pour des petites élongations :
  - (a) vrai
  - (b) faux
- (c) En présence de frottements , l'amplitude d'un pendule de torsion :
  - (a) croît
  - (b) décroît
  - (c) reste constante
- (d) Plus la longueur du fil d'un pendule simple est grande , plus sa période est :
  - (a) courte
  - (b) longue
- (e) Plus la constante de torsion est grande , plus la période du pendule de torsion est :
  - (a) grande
  - (b) petite

**Pendule élastique****Exercice 2 : résolution analytique de E.D**

Un oscillateur mécanique élastique est constitué d'un ressort de constante de raideur  $K = 10N/m$  associé à un solide de masse  $m = 250g$ . On écarte le système de sa position d'équilibre de  $2cm$  et on l'abandonne sans vitesse initiale.



On considère un axe  $(O, \vec{i})$ , avec O coïncide avec la position du centre d'inertie G du solide à l'équilibre et le vecteur unitaire  $\vec{i}$  parallèle au déplacement du solide.  
On repère la position G du solide à chaque instant par l'elongation  $OG = x(t)$ .

1. Montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide obéit, en absence de frottement , à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m} \cdot x = 0$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos \left( \frac{2\pi}{T_0 t + \varphi} \right)$$

- (a) Déterminer l'expression de la période propre  $T_0$  des oscillations du pendule élastique et calculer sa valeur .
- (b) Déterminer les paramètres  $X_m$  et  $\varphi$  , sachant qu' à l'instant  $t=0$  , G passe par la position d'équilibre du pendule dans le sens positif .Écrire cette solution.
- (c) Déterminer la vitesse des oscillation à l'instant  $t$  , en déduire la vitesse maximale du système en précisant sa positions .
- (d) Déterminer les caractéristiques de la force  $\vec{F}$  exercée par le ressort sur le solide dans les deux cas suivant :
  - \* lorsque le solide passe par sa position d'équilibre stable ;
  - \* lorsque  $x = X_m$  et  $x = -X_m$

### Solution : exercice 2

1. Établissement de l'équation différentielle du mouvement :

Référentiel lié au laboratoire considéré comme Galiléen ;

Système étudié : le solide (S) ;

Bilan des forces exercées sur le système : le poids  $\vec{P}$ , la réaction du plan horizontal  $\vec{R}$  et la tension du ressort  $\vec{F} = -K \cdot \Delta l$  ;

On applique la deuxième loi de Newton sur (S) :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$$

On projette la relation sur  $x' Ox$  :

$$0 + 0 - K \cdot \Delta l = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

d'où

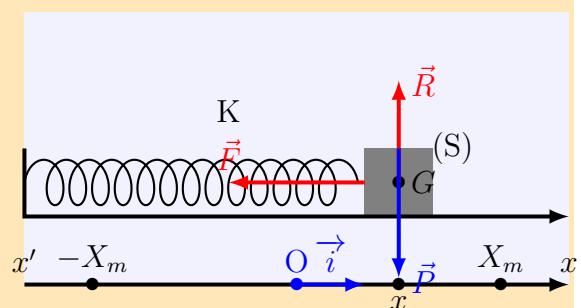
$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K}{m} \cdot x = 0}$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos \left( \frac{2\pi}{T_0 t + \varphi} \right)$$

2.1 L'expression de la période propre  $T_0$  des oscillations du pendule élastique :

$x(t)$  solution de l'équation différentielle , donc elle la vérifie , i.e on dérive deux fois  $x(t)$  par rapport au temps :



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t + \varphi}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_0^2} x(t)$$

Pour que  $x(t)$  soit solution de l'E.D il suffit que

$$\frac{K}{m} = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Application numérique :  $T_0 \approx 1s$

2.2 On détermine les paramètres  $X_m$  et  $\varphi$ , sachant qu' à l'instant  $t=0$ , G passe par la position d'équilibre du pendule dans le sens positif :

D'après les données de l'exercice on  $X_m = 2.10^{-2}m$

En considérant les conditions initiales suivantes : à  $t = 0$  on a  $x(0) = 0$  passe par la position d'équilibre et  $v(0) > 0$  ;

$$X_m \cos \varphi = 0 \text{ donc } \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

et puisque la vitesse à  $t=0$  est positive :  $-X_m \frac{2\pi}{T_0} \sin(\varphi) > 0$  c'est à dire que  $\sin \varphi < 0$ , d'où

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

donc la solution de E.D est :

$$x(t) = 2 \times 10^{-2} \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

2.3 La vitesse des oscillation à l'instant  $t$ , en déduire la vitesse maximale du système en précisant sa positions :

$$\text{La vitesse des oscillations : } v(t) = -4 \times 10^{-2} \pi \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Cette vitesse est maximale lorsque  $\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = -1$  i.e que  $v_{max} = 4 \times 10^{-2} \pi$

2.4 Les caractéristiques de la force  $\vec{F}$  exercée par le ressort sur le solide dans les deux cas suivant :

L'intensité de la force : Est une force de rappel qui s'oppose au sens d'allongement  $F(t) = K \cdot x(t)$

\* lorsque le solide passe par sa position d'équilibre stable ;

nous avons  $x(t) = 0$  donc  $F(t) = 0$

\* lorsque  $x = X_m$  et  $x = -X_m$

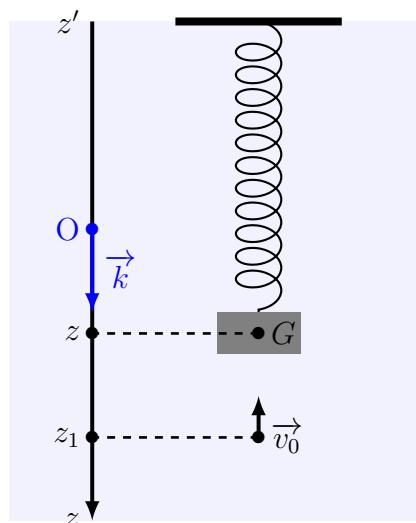
Pour  $x = X_m$  nous avons  $\vec{F} = K \cdot X_m \vec{i}$  l'intensité de la force est maximale et dans le même sens que  $\vec{i}$ .

Pour  $x = -X_m$  nous avons  $\vec{F} = -K \cdot X_m \vec{i}$  l'intensité est maximale et dans le sens opposé de  $\vec{i}$

**Exercice 3 : Pendule élastique vertical**

Un pendule élastique vertical est constitué d'un ressort de constante de raideur  $K = 10N/m$  associé à un solide de masse  $m = 300g$ . On écarte le système de sa position d'équilibre de  $z_1 = 2cm$  et à l'instant  $t=0$  (origine des dates) on l'abandonne avec une vitesse initiale  $v_0 = 0.3m/s$  dans le sens négatif de l'axe ( $O, \vec{k}$ ) orienté vers le bas et avec  $O$  coïncide avec la position du centre d'inertie  $G$  du solide à l'équilibre stable et le vecteur unitaire  $\vec{k}$  parallèle au déplacement du solide.

On repère la position  $G$  du solide à chaque instant par l'élongation  $OG = z(t)$ .



- Montrer que le mouvement du centre d'inertie  $G$  du solide obéit, en absence de frottement , à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{z} + \frac{K}{m} \cdot z = 0$$

- La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = Z_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

- Déterminer l'expression de la période propre  $T_0$  des oscillations du pendule élastique et calculer sa valeur .
  - Déterminer les paramètres  $Z_m$  et  $\varphi$  .
- Étudions le cas où on lance le système à  $t=0$  , à partir de l'état d'équilibre stable , dans le sens positive avec une vitesse  $v_0 = 0,3m/s$  . Déterminer les paramètres  $Z_m$  et  $\varphi$  .

### Solution : exercice 3

1. Établissement de l'équation différentielle du mouvement :

Référentiel lié au laboratoire considéré comme Galiléen ;

Système étudié : le solide (S) ;

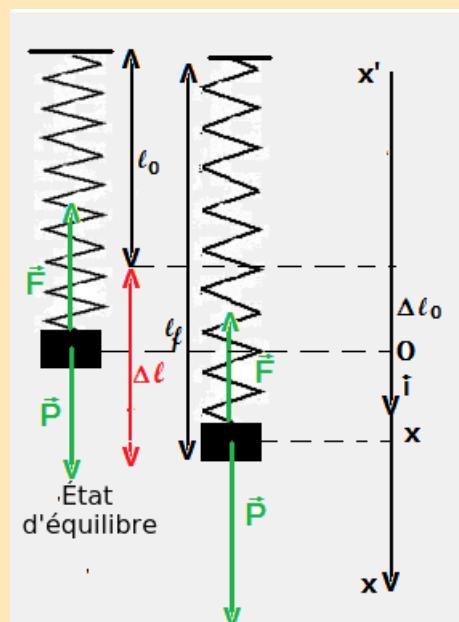
Bilan des forces exercées sur le système : le poids  $\vec{P}$  et la tension du ressort  $\vec{F} = -K\cdot\Delta l$  ;

Étude du système à l'état d'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{F} = -K\cdot\Delta l_0 = \vec{0}$$

On projette sur  $z' Oz$ , on aura :

$$m.g - K\cdot\Delta l_0 = 0 \quad (1)$$



À l'instant  $t$  on applique la deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{F} = m\cdot\vec{a}_z$$

$$mg - K\cdot\Delta l = m\cdot\frac{d^2z}{dt^2}$$

avec  $\Delta l = \Delta l_0 + x$  Donc :

$$mg - K\cdot\Delta l_0 - K\cdotz = m\cdot\frac{d^2z}{dt^2}$$

et d'après l'état d'équilibre on a  $m.g - K\cdot\Delta l_0 = 0$ , I.e que E.D sera :

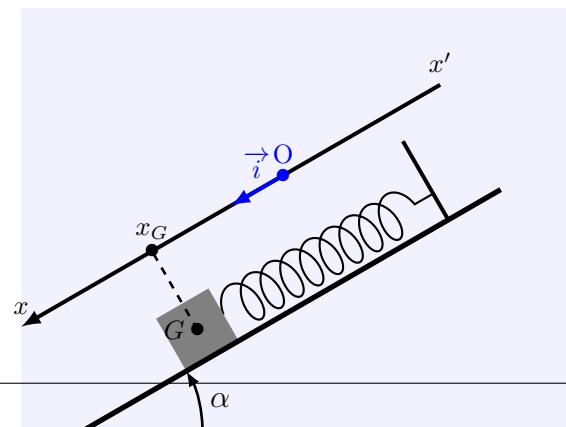
$$-K\cdotx = m\cdot\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{K}{m}\cdotz = 0}$$

2.

### Exercice 4 : Pendule élastique incliné

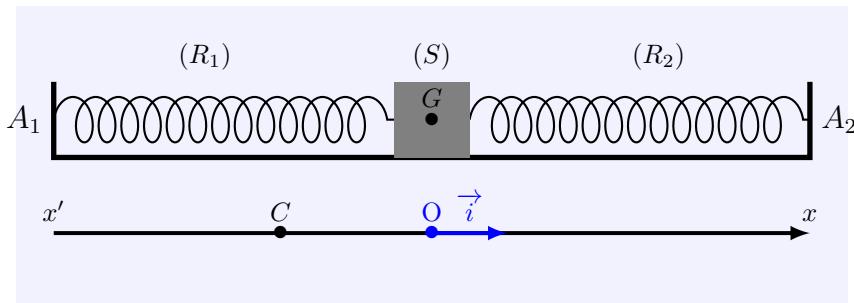
Un ressort de masse négligeable , à spires non jointives, parfaitement élastique n est accroché par l'une des extrémités à un support fixe et l'autre extrémité , on accroche un solide de masse  $m = 500g$ . L'ensemble est situé sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle  $\alpha = 30^\circ$  avec l'horizontale. Les frottements sont négligé dans tout l'exercice .



1. Le ressort de longueur  $l_0 = 20\text{cm}$  au repos , à l'équilibre la longueur du ressort est  $l = 25\text{cm}$  . En déduire la valeur de la constante du raideur K du ressort . On prend  $g = 10\text{m/s}^2$
2. On écarte le solide vers le bas , de sa position d'équilibre à  $t=0$  d'une distance de  $d = 3\text{cm}$  et on le lâche sans vitesse initiale . Par une étude dynamique trouver l'équation horaire du mouvement .
3. La période des oscillations dépend-t-elle de l'angle  $\alpha$  ?

### Exercice 5 : Association de deux ressorts

On place un cavalier de masse  $M = 700\text{g}$  sur un rail à coussin d'air horizontal et on le fixe aux extrémités de deux ressorts semblables  $R_1$  et  $R_2$  de mêmes constantes de raideur  $K_1 = K_2 = 20\text{N/m}$ . La longueur initiale de chaque ressort est  $l_{01} = l_{02} = 18\text{cm}$  et à l'équilibre , ils ont même allongement  $\Delta l_1 = \Delta l_2 = 2\text{cm}$ .



1. On écarte le cavalier de sa position d'équilibre de distance  $OC = 2\text{cm}$  de sens vers  $A_1$  et de direction de  $A_1A_2$ , puis on l'abandonne sans vitesse initiale , à l'instant  $t=0$  .
  - Déterminer, À un instant t , les expressions des allongements de  $\Delta l_1$  et  $\Delta l_2$  pour chaque ressort en fonction de x l'abscisse de G
  - Déterminer l'équation différentielle du mouvement de G .
  - La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme suivante :

$$x'(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec  $\omega_0$  est la pulsation propre du mouvement de G ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ . Donner l'expression de  $\omega_0$  et  $T_0$  . Déterminer  $\varphi$  et  $X_m$

2. On fixe au cavalier une petite plaque de masse négligeable puis on l'immerge dans un liquide . Sachant que la force de frottement appliquée par le liquide sur la plaque au cours du mouvement du cavalier est de la forme  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$  où  $\alpha$  est une constante positive et  $\vec{v}$  le vecteur vitesse de G . Montrer que l'équation différentielle du mouvement de G peut s'écrire sous la forme suivante :

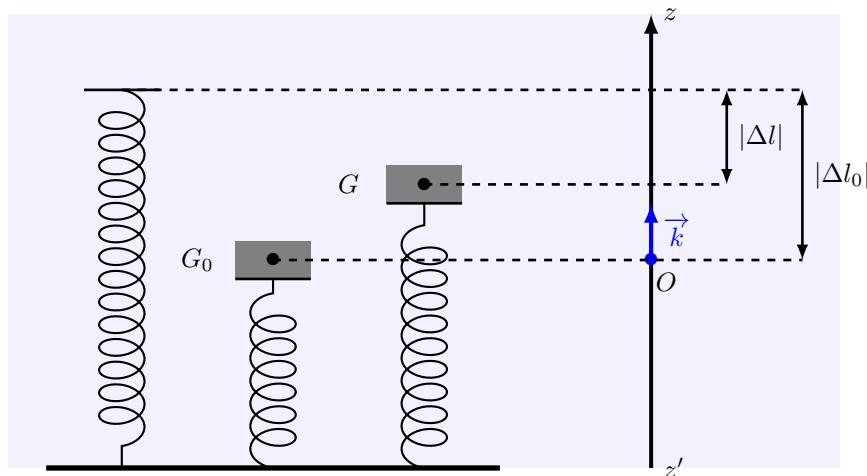
$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{2K}{m} x = 0$$

3. Donner la forme des courbes qui représentent l'elongation  $x(t)$  du centre d'inertie G lorsque les frottements deviennent de plus en plus importants . ( on prend les mêmes conditions initiales )

### Exercice 6 :La suspension : les amortisseurs

La suspension d'une automobile se compose , au niveau de chaque roue , d'un ressort et d'un amortisseur ( généralement à l'huile )

On modélise l'automobile par un solide de masse  $M$  de centre d'inertie G ; les ressorts par un seul ressort vertical , à spire non jointive, de masse négligeable et d'une constante de raideur  $K$  . Le système (ressort+solide) est représenté dans la figure ci-dessous :



Le repérage des positions  $z$  du centre d'inertie G du solide se fait selon un axe Oz orienté vers le haut ; l'origine O est choisie à la position d'équilibre  $G_0$  du centre d'inertie du solide .

#### I. Étude du système à l'état d'équilibre .

Pour la vérification de la valeur de la constante du raideur de ressort , on mesure la longueur initiale du ressort  $l_0$ , puis on place le solide (S) de masse  $M = 100g$  sur le plateau de masse négligeable, fixé à l'extrémité libre du ressort . Ce dernier sera compressé de  $\Delta l_0$  et sa longueur finale à l'équilibre  $l = 7,6cm$  .

1. Calculer la constante de raideur K du ressort .
2. Calculer l'erreur relative qui peut se commettre au cours de cette mesure par l'opérateur sur la constante de raideur du ressort . la valeur de K indiquée par le fabricant est  $K = 40N/m$ . On donne la formule de l'erreur relative :

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{X_{ex} - X_{th}}{X_{th}}$$

#### II. Étude dynamique :

On écarte le système (ressort + solide ) de sa position d'équilibre vers le bas de  $2cm$  et on l'abandonne sans vitesse initiale . Le système effectue un mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre  $G_0$  .

1. En appliquant la deuxième loi de Newton , montrer que l'équation différentielle du mouvement de G est :

$$\ddot{z} + \frac{K}{M}z = 0$$

2. Écrire la solution  $z(t)$  de cette équation différentielle en fonction de  $f_0$  la fréquence propre des oscillations ,  $z_m$  et le temps t . En déduire l'expression de la vitesse  $v(t)$

3. En utilisant les expressions de  $v(t)$  et  $z(t)$ , montrer que :

$$v = 2\pi f_0 \sqrt{z_m^2 - z^2}$$

$$\tan \Phi = -\frac{v}{2\pi f_0 z}$$

avec  $\Phi$  est le déphasage de  $z(t)$  à l'instant  $t$ .

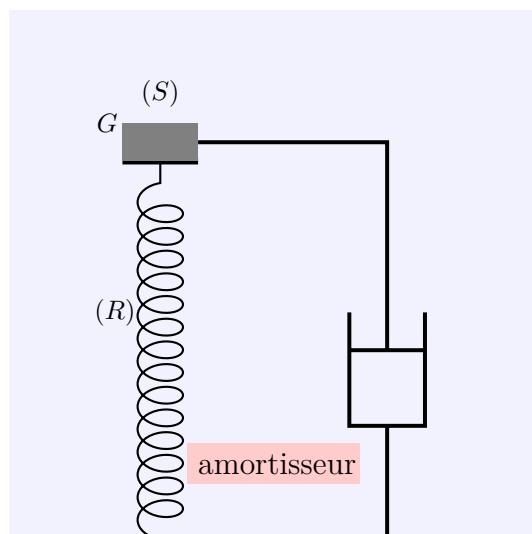
4. Calculer  $v$  la vitesse de G et  $\Phi$  la phase du mouvement à l'instant  $t = 2s$

## II. Étude des oscillations forcées

Pour modéliser l'amortissement, on ajoute au dispositif précédent un amortisseur qui engendre une force de frottement fluide de sens opposé au vecteur vitesse du mouvement de G et proportionnelle à sa valeur tel que :

$$\vec{f} = -\alpha \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}$$

où  $\alpha$  est une constante positive qui dépend de la qualité des amortisseurs appelée le coefficient d'amortissement.

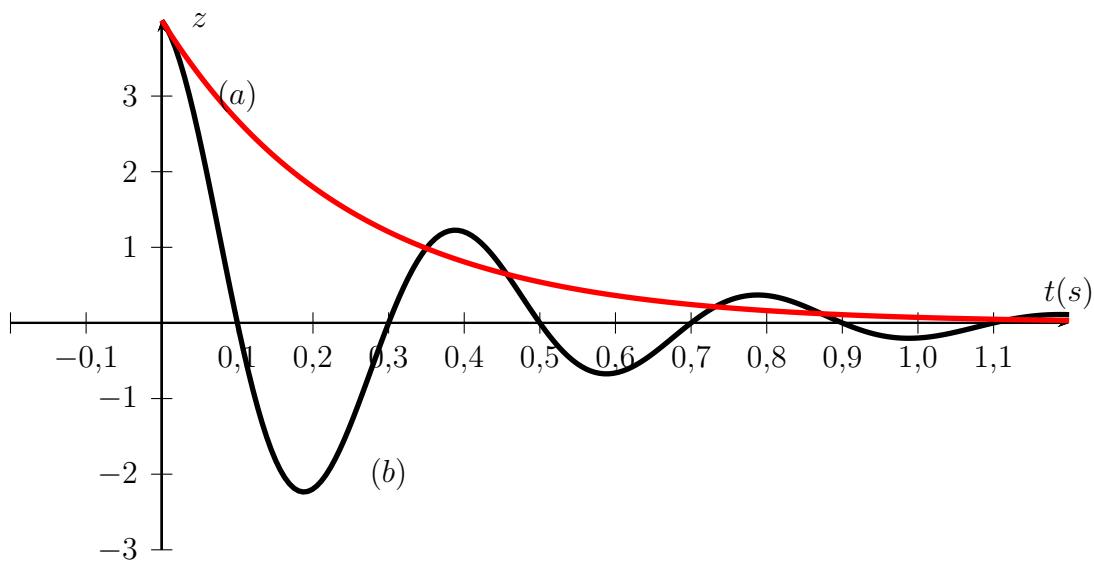


1. Montrer que l'équation différentielle du mouvement de G est :

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + K.z = 0$$

2. Pour ce système mécanique, identifier l'excitateur et le résonateur.

3. On considère deux automobiles ( $A_1$ ) et ( $A_2$ ), assimilables chacune à un solide de même masse M reposant sur le ressort (R) vertical. On représente les courbes  $z(t)$  des positions du centre d'inertie G du solide modélisant chaque automobile lors de passage sur une bosse.



- a. Donner les noms des régimes associés aux deux courbes.

- b. L'une des courbes présente une pseudo-période . Déterminer graphiquement sa valeur .
- c. Les allures différentes des courbes sont dues au coefficient d'amortissement  $\alpha$ . Quelle courbe correspond à la plus grande valeur de  $\alpha$ ? Justifier la réponse .
- d. Quelle automobile possède la meilleure suspension ?