

## Probabilités

### I) Vocabulaires.

- **aléatoire** = Lié au hasard ; imprévisible ; arbitraire.
- On dit qu'une **expérience** est **aléatoire** si on peut déterminer parfaitement, par avance toutes les issues possibles mais on ne peut pas prévoir par avance, laquelle de ces issues sera réalisée.
- L'**univers**  $\Omega$  est l'ensemble de tous les résultats possibles.  
Posons  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ . (C'est-à-dire  $\text{card}\Omega = n$ )
- On appelle **événement** toute partie  $A$  de  $\Omega$ .
- Un événement réduit à une seule issue  $\{\omega_i\}$  est un **événement élémentaire**.
- $\Omega$  est appelé l'événement **certain**.
- $\emptyset$  est appelée l'événement **impossible**.
- Si  $A$  et  $B$  désignent deux événements de  $\Omega$ , l'événement  $A \cup B$  est réalisé si l'un au moins des événements  $A$  et  $B$  est réalisé.
- L'événement  $A \cap B$  est réalisé si les événements  $A$  et  $B$  sont tous les deux réalisés.
- L'événement contraire d'un événement  $A$ , est  $\bar{A}$  constitué des éléments de  $\Omega$  n'appartenant pas à  $A$ .

**Exemple** : Lancer un dé à 6 faces et noter le chiffre apparent sur la face supérieure, est une expérience aléatoire :

- Il y a 6 issues possibles.
- L'univers de cette expérience est  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .
- $A$  : « Le résultat est impair » est un événement qu'on peut exprimer en langage symbolique de la forme suivante  $A = \{1; 3; 5\}$ .
- $B$  : « Le résultat est un multiple de 5 », est on peut écrire  $B = \{5\}$ . Donc  $B$  est un événement élémentaire, mais « 5 » est une issue possible et  $B$  est un ensemble qui contient cette seule issue.

### II) Probabilité d'un événement.

**Définition** : Pour certaines expériences aléatoires, sous certaines conditions, on peut déterminer en pourcentage ou par un quotient « la chance » qu'un événement a pour ce réaliser. Ce **nombre** s'appelle la **probabilité** de l'événement.

- La probabilité d'un événement  $A$  d'un univers fini  $\Omega$  est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.
- Par exemple : Si  $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$  et  $A = \{\omega_2; \omega_5; \omega_8\}$  alors :  $p(A) = p(\{\omega_2\}) + p(\{\omega_5\}) + p(\{\omega_8\})$
- $p(\Omega) = 1$  ;  $p(\emptyset) = 0$  et Pour tout événement  $A$  on a :  $0 \leq p(A) \leq 1$

#### Propriétés

- Pour tous événements  $A$  et  $B$  on a :  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ .
- Pour tous événements **disjoints** ou **incompatibles**  $A, B$  on a :  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- Pour tous événements deux à deux **disjoints** ou **incompatibles**  $A_1, A_2, \dots, A_n$  on a :  
$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n).$$
- Pour tout événement  $A$ ,  $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ .

### III) Equiprobabilité.

**Définition** : Dans une expérience aléatoire, si tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisée, on dit qu'on est dans une situation d'équiprobabilité. Donc : si  $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$

Alors  $p(\{\omega_i\}) = \frac{1}{\text{card}\Omega}$  ; c'est-à-dire pour tous événement  $A$  on a :  $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$ .

**Remarque :** Dans le cas de l'équiprobabilité la détermination d'une probabilité se ramène en générale à des problèmes de **dénombrement**.

**Exemple :** On lance un dé **équilibré** (non truqué) dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse à la probabilité de l'évènement :  $A$  « le numéro de la face supérieure est multiple de 2 »

on a :  $A = \{2 ; 4 ; 6\}$  donc  $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

#### IV) Probabilité conditionnelle.

**Définition :** Soit  $B$  un évènement de l'ensemble  $\Omega$ , tel que  $P(B) \neq 0$ .

On définit sur  $\Omega$  une nouvelle probabilité, notée  $P_B$ , en posant, pour tout évènement  $A$ ,  $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

On note  $P_B(A) = P(A/B)$  qui se lit « **probabilité de A que B est réalisé** ».

**Propriété :** Soient  $A$  et  $B$  deux évènements de l'ensemble  $\Omega$ , tel que  $P(B) \neq 0$ .

Alors :  $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$ .

**Définition :** On dit que deux évènements  $A$  et  $B$  sont indépendants lorsque .  $P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$ .

**Remarque :** Ne pas confondre **indépendant** et **incompatible**

#### V) Probabilités totales.

1) **Arbre de probabilité :** C'est un arbre sur lequel on place des probabilités conditionnelles d'évènements, cette présentation permet de rendre plus simple le calcul de probabilité :

**Remarque :** Arbre probabiliste  $\neq$  Arbre à dénombrer

**Exemple**

Soit  $p$  une probabilité sur un univers  $\Omega$  et  $A, B$  et  $C$  trois évènements incompatibles et leur réunion est  $\Omega$

Soit un évènement  $M$ , donc nous obtenons l'arbre probabiliste suivant :

**Remarque :** Un **arbre de probabilités** comporte des **nœuds** et des **branches**.

On applique les règles suivantes :

- la somme des probabilités marquées sur des branches issues d'un même nœud est égale à 1,
- la probabilité d'un évènement qui correspond à un chemin est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin
- la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des branches aboutissant à cet évènement.

**Donc :**

$$\begin{aligned} p(M) &= p(M \cap A) + p(M \cap B) + p(M \cap C) \\ &= p_A(M) \times p(A) + p_B(M) \times p(B) + p_C(M) \times p(C) \end{aligned}$$

2) **Formule des probabilités totales.**

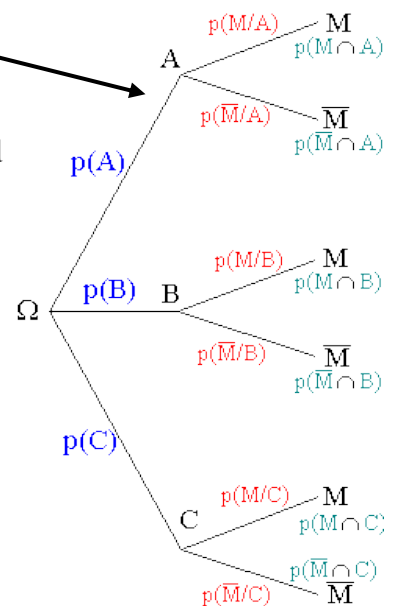
**Théorème :** Soit  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , des évènements de probabilité non nulle, réalisant une partition de l'univers  $\Omega$ . Alors, pour tout évènement  $B$  de ce même univers, on a :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_k) \\ &= p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \dots + p_{A_k}(B) \times p(A_k) \end{aligned}$$

**Exercice :** On considère trois urnes respectivement notées  $U_1, U_2$  et  $U_3$ . L'urne  $U_1$  contient **une** boule rouge et **cinq** boules jaunes, l'urne  $U_2$  contient **trois** boules rouges et **une** boule jaune, l'urne  $U_3$  contient **une** boule rouge et **deux** boules jaunes.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?



## VI) Variables aléatoires.

**Introduction :** Une variable aléatoire est une variable dont la valeur est déterminée en fonction du résultat d'une expérience aléatoire.

**Activité :** On lance **trois fois** de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 points pour chaque résultat « **Pile** » et on perd 1 point pour chaque résultat « **Face** ».

L'ensemble des issues est  $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$  et il est de bon sens de choisir l'équiprobabilité sur  $\Omega$ .

L'application  $X : \Omega \rightarrow [0, 1]$ , qui, à chaque issue, associe le **gain** du joueur, prend les valeurs **- 3, 0, 3 et 6**.

Pour chaque valeur, on peut considérer l'événement  $(X = 3) = \{PPF, PFP, FPP\}$  et lui associer sa probabilité  $\frac{3}{8}$

On obtient ainsi une nouvelle **loi de probabilité** sur l'ensemble des gains :  $X(\Omega) = \{-3, 0, 3, 6\}$ .

On la nomme **loi de X**.

| gain $x_i$   | $x_1 = -3$ | $x_2 = 0$ | $x_3 = 3$ | $x_4 = 6$ |
|--------------|------------|-----------|-----------|-----------|
| $p(X = x_i)$ | 1/8        | 3/8       | 3/8       | 1/8       |

**Définition :** soit  $X$  une variable aléatoire discrète, l'application  $p$  est dite loi de probabilité de  $X$ ,

définie par :

$$P : X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

$$x_i \mapsto p(X = x_i)$$

**Remarque :** Si  $X$  est une variable aléatoire discrète et  $p$  sa loi de probabilité et  $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$

$$\text{Alors : } \sum_{i=1}^n p(X = x_i) = 1$$

**Esperance mathématique :**

On appelle espérance mathématique de  $X$  le nombre, noté  $E(X)$ , définit par :  $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(X = x_i)$

**Variance et écart type :**

▪ On appelle variance de  $X$  le nombre positif noté  $V(X)$  suivant :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) = E(X^2) - E(X)^2$$

▪ On appelle écart type de  $X$  le nombre positif noté  $\sigma(X)$  suivant :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

## VII) Loi Binomiale.

**Définition :** On réalise  $n$  fois successivement et d'une manière indépendante une expérience aléatoire qui a deux résultats possibles : **succès** de probabilité  $p$  et **échec** de probabilité  $(1-p)$ .

Donc  $(\forall k \in X(\Omega)); P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$X$  : nombre de succès obtenu est une variable aléatoire binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ .

**Propriété :**

Si  $X$  est une variable aléatoire binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ . Alors :

$$X(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

**Quelques interprétations**

- $E(X)$  est la **moyenne** des valeurs  $x_i$ , pondérées par les valeurs  $p_i$ .
- Dans le domaine des jeux (le terme « espérance » vient de là),  $E(X)$  est le **gain moyen** que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties. Cela permet de qualifier un jeu d'équitable (ou honnête) lorsque  $E(X) = 0$  ; lorsque  $E(X) > 0$ , le jeu est favorable au joueur, il lui est défavorable si  $E(X) < 0$ .
- La variance et l'écart-type sont des paramètres de **dispersion**.