

## Probabilités

EL KYAL MOHAMED

### ➤ Probabilités d'un ensemble fini:

*La probabilité d'un événement  $A$  est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent, on la note  $p_A$*

### ➤ Propriétés :

Soit  $\Omega$  l'univers associé à une expérience aléatoire

L'événement:	Probabilités:
$A$	$0 \leq p_A \leq 1$
$\bar{A}$	$p_{\bar{A}} = 1 - p_A$
$A \cup B$	$p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$
$A \cup B$	$p_{A \cup B} = p_A + p_B$ ( $A$ et $B$ sont incompatibles)

*S'il y a équiprobabilité alors pour tout événement  $A$  de  $\Omega$ , on a:*

$$p_A = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}}$$

### ➤ Loi d'une variable de probabilité aléatoire:

Soit  $\Omega$  l'univers associé à une expérience aléatoire

Pour définir la loi de probabilité de la variable  $X$  sur  $\Omega$  on suit les étapes suivantes :

- 1) On détermine  $X(\Omega) = x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$  l'ensemble des valeurs prises par  $X$
- 2) On calcule pour chaque valeur  $x_i$  sa probabilité  $p_i = p(X = x_i)$  avec  $i \in \{1; 2; \dots; n\}$
- 3) On résume la loi de probabilité de la variable  $X$  par le tableau suivant :

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$p(X = x_i)$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_n$

### ➤ Probabilité conditionnelle :

Soit  $A$  et  $B$  deux événements liés à une même expérience aléatoire tel que:  $p_A \neq 0$

La probabilité de l'événement  $B$  sachant que  $A$  est réalisé est le nombre :

$$p_A(B) = p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p_A}$$

### ➤ Événements indépendants :

Soit  $A$  et  $B$  deux événements liés à une même expérience aléatoire

$A$  et  $B$  sont indépendants  $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p_A \times p_B$

➤ L'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire:

Soit  $X$  une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau suivant:

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$p_{X=x_i}$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_n$

L'espérance mathématique de la variable $X$	$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + \dots + x_n \times p_n$
La variance de la variable $X$	$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
L'écart-type de la variable $X$	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

➤ Epreuve répétée :

Soit  $p$  la probabilité d'un événement  $A$ , lors d'une expérience aléatoire si on répète  $n$  fois l'épreuve dans des conditions identiques alors la probabilité de réalisation de  $A$  exactement  $k$  fois durant les  $n$  épreuves est :

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad k \leq n$$

➤ Loi binomiale :

Soit  $p$  la probabilité d'un événement  $A$ , lors d'une expérience aléatoire on répète  $n$  fois l'épreuve dans des conditions identiques si la variable aléatoire  $X$ , égale au nombre de réalisation de  $A$  durant les  $n$  épreuves alors la loi de probabilité de la variable  $X$  est donnée par :

$$\forall k \in \{0; 1; 2; \dots; n\} \quad P(X=k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

On dit que la variable  $X$  suit une **loi binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$  et on a

$$E(X) = n \times p \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p)$$