# Dénombrement

## A – Notion d'ensemble

## B - Dénombrement

I - Principe fondamental de dénombrement

II - Arrangement avec répétition

III - Arrangement sans répétition

VI – Les combinaisons

V - Formule de binôme de Newton

AHMED AGOUZAL

# Notion d'ensemble

## 1) Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets appelés éléments. Ensemble des résultats possibles d'un lancé de dé : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- $F$ est une **partie** (ou est inclus, ou est un sous-ensemble) de $E$ si tous les éléments de $F$ sont aussi des éléments de $E$. Cela se note $F \subset E$.
- On note $\emptyset$ **l'ensemble vide** : l'ensemble qui ne contient aucun élément.

AHMED AGOUZAL

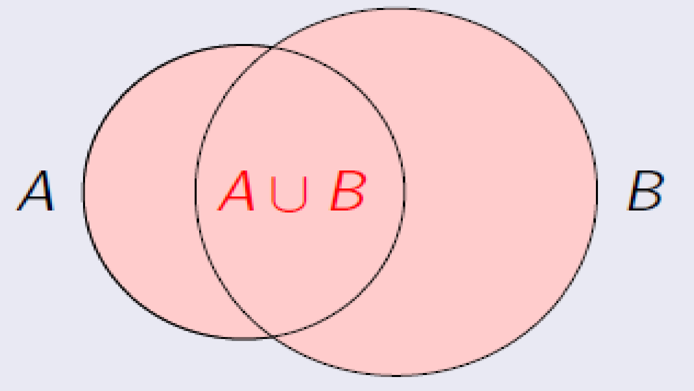
# Notion d'ensemble

## 2) L'union

**Définition:**

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A ou B ou aux deux est appelé union de A et B, noté $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

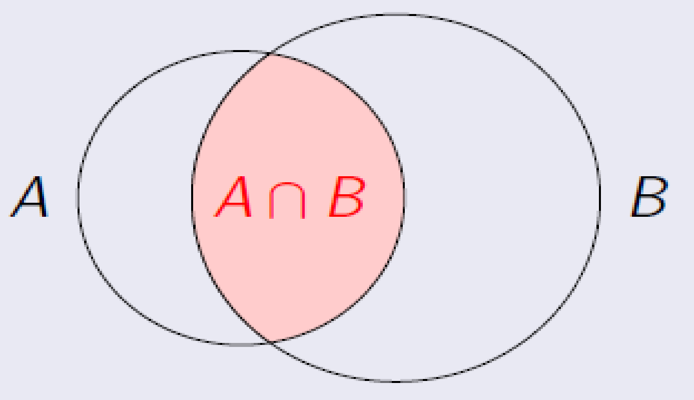



## 3) L'intersection

**Définition:**

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B est appelé intersection de A et B, noté $A \cap B$.

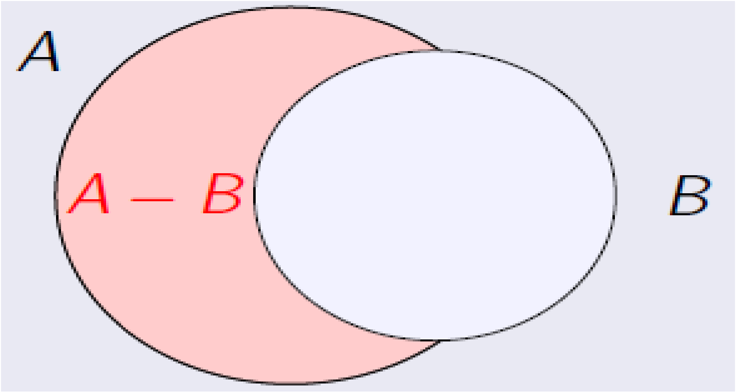
$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$




AHMED AGOUZAL

# Notion d'ensemble

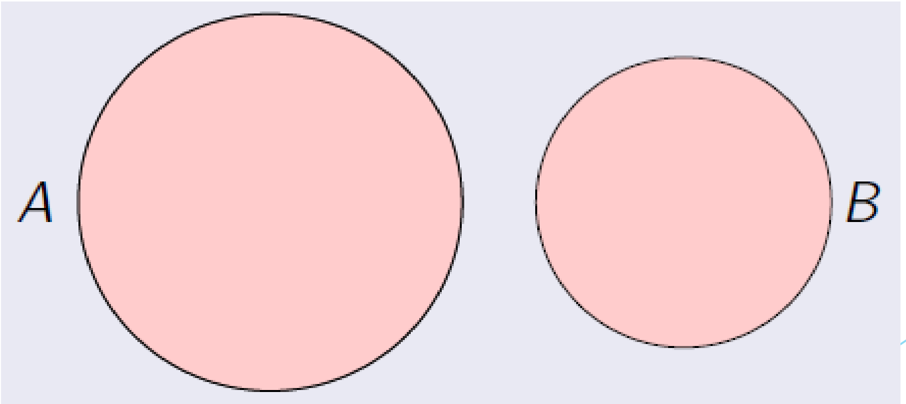
## 2) La différence




<u>Définition</u>:
L'ensemble de tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B est appelé différence de A et B, noté A - B ou A\B

$$A - B = \{x \in E \mid x \in A \quad \text{et} \quad x \notin B\}$$

## 3) L'incompatibilité




<u>Définition</u>:
Deux ensembles A et B sont disjoints ou incompatibles s'ils n'ont aucun élément en commun. $A \cap B = \emptyset$

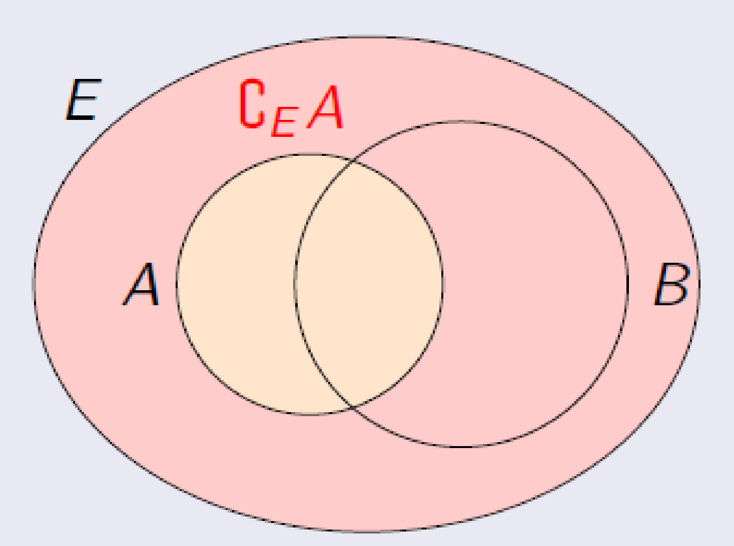
AHMED AGOUZAL

# Notion d'ensemble

## 4) Le complémentaire

Définition:
L'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A est appelé Le complémentaire de A dans E, noté $\overline{\mathbf{A}}$
alors $\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{A}} = \varnothing$ et $\mathbf{A} \cup \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$

$$C_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$




## 4) Le produit cartésien

L'ensemble de tous les couples d'un élément de E et d'un élément de F est appelé produit cartésien de E et F noté $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$

Attention $\mathbf{E} \times \mathbf{F} \neq \mathbf{F} \times \mathbf{E}$

$$\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$
$$\{3,4\} \times \{1,2\} = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

## I - Principe fondamental de dénombrement

### 1) Définition

Soient n un entier naturel non nul et E un ensemble à n élément .

On dit que E est un ensemble fini.

Le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé Cardinal de E

noté Card (E) = n

Dénombrer un ensemble fini, c'est compter ses éléments, c'est-à-dire calculer son cardinal.

### 2 - Exemple

Si $A = \{1; 2; 3; a; b; c\}$ alors $Card(A) = 6$.

Si $A = \phi$ il comporte 0 élément alors Card(A) = 0

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

## 3 - Propriétés

Soient A et B deux parties d'un ensemble finis E .

- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$
- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ si $A \cap B = \phi$
- $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$
- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) * \text{Card}(B)$

## 4 - Exemple

Un centre de loisirs accueille 100 élèves, 53 élèves pratiquent le football, 33 pratiquent le basket-ball et 15 pratiquent le football et le basket-ball.

1) Quelle est le nombre d'élèves qui pratiquent au moins un sport?
2) Quelle est le nombre d'élèves qui pratiquent le football sans le basket-ball?
3) Quelle est le nombre d'élèves qui pratiquent le basket-ball sans le football ?
4) Quelle est le nombre d'élèves qui ne pratiquent pas les deux sports?

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

Solution:

Soit E l'ensemble des élèves donc Card(E)= 100

A un sous-ensemble de E des élèves qui pratiquent le football donc Card(A)=53

B un sous-ensemble de E des élèves qui pratiquent le basket-ball donc Card(B)=33 et Card $(A \cap B) = 15$

1) $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

$= 53 + 33 - 15 = 71$

2) On a $\text{Card}(A \cap \overline{B}) + \text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A)$

Donc $\text{Card}(A \cap \overline{B}) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$

Donc $\text{Card}(A \cap \overline{B}) = 53 - 15 = 38$

D'où $\text{Card}(A \cap \overline{B}) = 38$

3) On a $\text{Card}(B \cap \overline{A}) + \text{Card}(B \cap A) = \text{Card}(B)$

Donc $\text{Card}(B \cap \overline{A}) = \text{Card}(B) - \text{Card}(B \cap A)$

Donc $\text{Card}(B \cap \overline{A}) = 33 - 15 = 18$

D'où $\text{Card}(B \cap \overline{A}) = 18$

4) On a $\text{Card}(\overline{A \cup B}) + \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(E)$

Donc $\text{Card}(\overline{A \cup B}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A \cup B)$

Donc $\text{Card}(\overline{A \cup B}) = 100 - 71$

D'où $\text{Card}(\overline{A \cup B}) = 29$

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

## 5) Principe multiplicatif

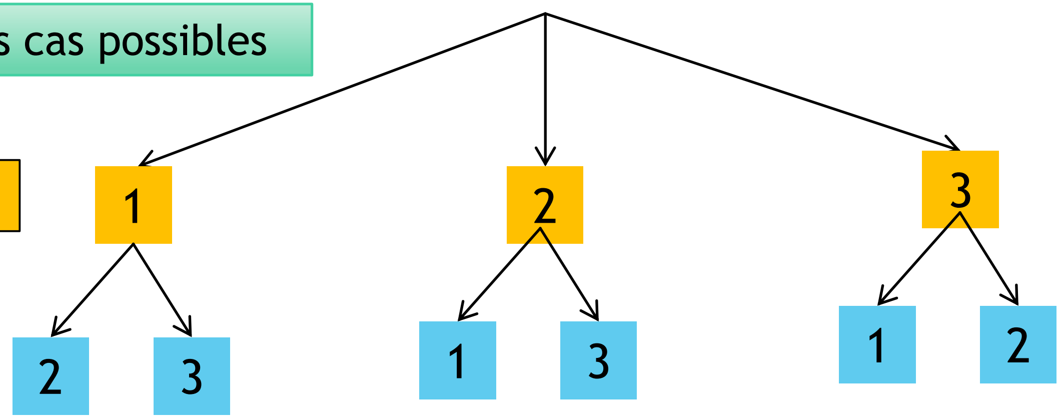
### a - Activité

1) Quels sont les nombres de deux chiffres distincts que l'on peut former à partir  des chiffres suivants : 1, 2 et 3.

Arbre des cas possibles

Chiffre des unités

Chiffre des dizaines

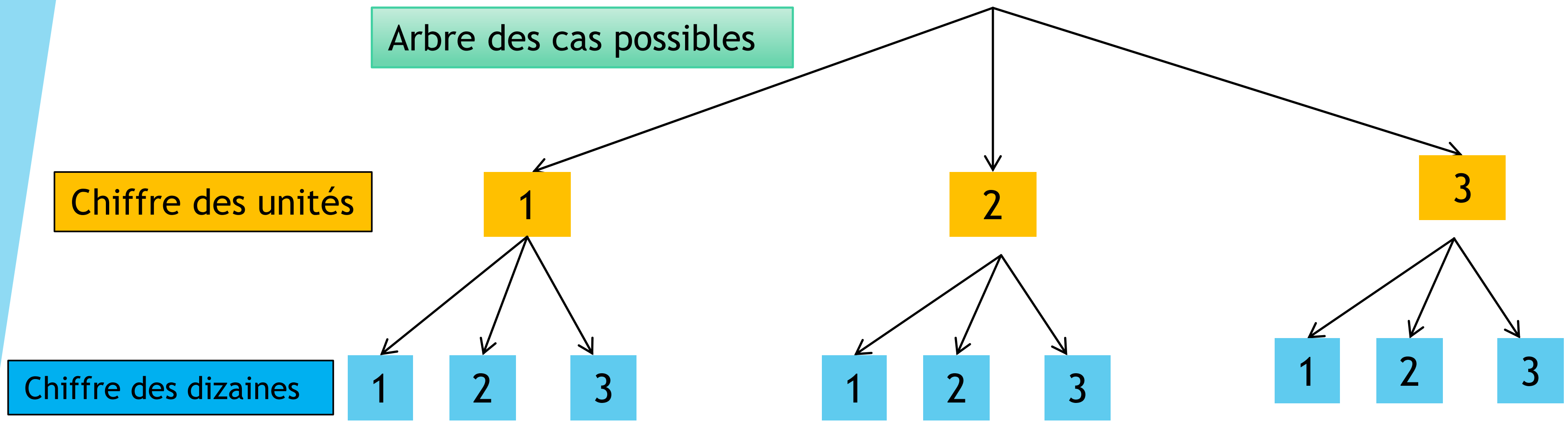



Il y a 3 choix possibles pour choisir le chiffre des unités et 2 choix possibles pour choisir le chiffre des dizaines donc on a $3 \times 2 = 6$ nombres possibles
les nombres formés par deux chiffres parmi les chiffres 1, 2 et 3 **sans répétition sont :**
21; 31; 12; 32; 13; 23.

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

2) Quels sont les nombres de deux chiffres que l'on peut former à partir des chiffres suivants : 1, 2 et 3.




Il y a 3 choix possibles pour choisir le chiffre des unités et 3 choix possibles pour choisir le chiffre des dizaines donc on a $3 \times 3 = 9$ nombres possibles
les nombres formés par deux chiffres parmi les chiffres 1, 2 et 3 **avec répétition sont:** 21; 31; 12; 32; 13; 23; 11; 22; 33.

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

## b – Principe multiplicatif

Si une expérience peut se décomposer en p opérations élémentaires tels que:
* La première opération peut être effectuée de $n_1$ manières différentes.
* La deuxième opération peut être effectuée de $n_2$ manières différentes.
* La troisième opération peut être effectuée de $n_3$ manières différentes.
* La $P^{\text{ième}}$ opération peut être effectuée de $n_p$ manières différentes.

Alors l'ensemble de toutes ces opérations peut être effectuées de
$N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots\ldots\ldots \times n_p$ manières différentes.

## C-Exemples

1)Dans la classe 2BPCF il y a 21 filles et 12 garçons.
Il faut une fille et un garçon pour représenter la classe dans un événement culturel. Combien de possibilités de choix?
Solution: 21 possibilités pour choisir une fille et 12 possibilités pour choisir un garçon. Il y a $21 \times 12 = 252$ possibilités

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

**2)** Combien de nombres de trois chiffres qu'on peut former avec les chiffres Suivants : 0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;.. ;9 ?

Solution:

Il y'a 10 possibilités pour le chiffre des unités

Il y'a 10 possibilités pour le chiffre des dizaines

Il y'a 9 possibilités pour le chiffre des centaines

Le nombre de possibilités est: $10 \times 10 \times 9 = 900$

3) On lance une pièce de monnaie 2 fois de suites. Quelle est le possibilités?

Solution:

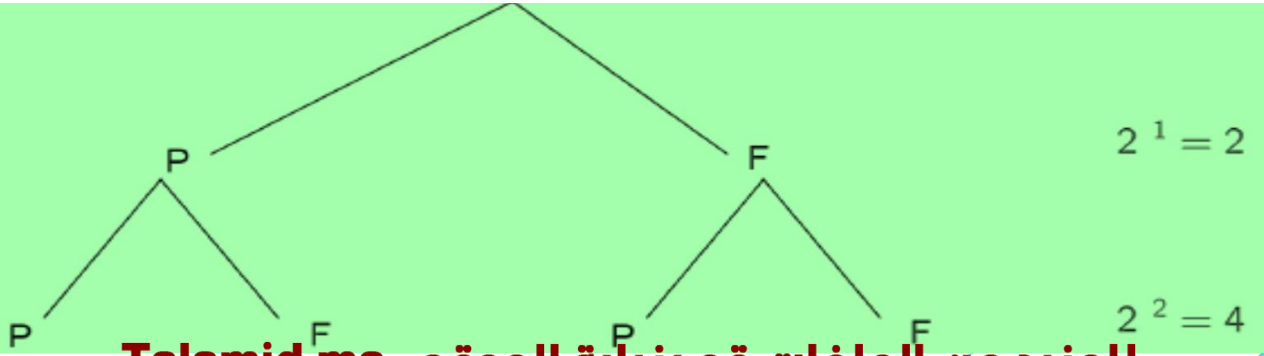
Il y'a 2 possibilités pour le premier jet: P (pile) ou F (face)

Il y'a 2 possibilités pour le deuxième jet: P (pile) ou F (face)

Le nombre de possibilités est $2 \times 2 = 4$

L'ensemble des possibilités est :

$\Omega = \{PP; FF; PF; FP\}$




**AHMED AGOUZAL**

# Dénombrement

## II - Arrangement avec répétition

### 1 - Définition

Soit E un ensemble fini, card(E) = n on pose E = $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ $p \in \mathbb{N}^*$
Chaque élément $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p)$ de $E^p$ s'appelle un arrangement avec répétition d'ordre p de n éléments.

Exemple: E = {1, 2, 3,4}
Les triplets (1,1,2) ; (1,4,2) ; (2,3,2) … sont des arrangements avec répétition d'ordre 3 de 4 éléments .
Les 5-uplets (1,1,2;2;3) ; (1,3;4,4,2) … sont des arrangements avec répétition d'ordre 5 de 4 éléments

### 2 - Propriété

Soit E un ensemble fini, card(E) = n, le nombre des arrangements avec répétition d'ordre p de n éléments est le cardinal de $E^p$ qui est $\text{card}(E^p)=(\text{card}E)^p$

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

## 3 - Exemple

Une urne contient: 6 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules rouges

On tire arbitrairement, successivement et avec remise 3 boules de l'urne.

1) Quel est le nombre des cas possibles?
2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:

   A" les 3 boules tirées sont blanches"

   B" les 3 boules tirées sont de la même couleur"

   C" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"

   D" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux"

   E" parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire"

   G" parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge"

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

## Solution:

6 B ; 4 N ; 2R

Tirage successif de 3 boules avec remise parmi 12

1) Quel est le nombre des cas possibles ?

$\mathrm{Card}(\Omega) = 12^3 = 1728$

2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:

A "les 3 boules tirées sont blanches"

$\mathrm{Card}(A) = 6^3 = 216$

B" les 3 boules tirées sont de la même couleur"

$\mathrm{Card}(A) = 6^3 + 4^3 + 2^3 = 288$

C" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"

L'événement contraire de C est $\overline{C}$ « les 3 boules tirées sont de la même couleur»

Donc $\overline{C} = B$

On sait que $\mathrm{card}(C) = \mathrm{card}(\Omega) - \mathrm{card}(\overline{C})$ donc $\mathrm{card}(C) = 1728 - 288 = 1440$

D'où $\mathrm{card}(C) = 1440$

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

D" les 3 boules tirées sont de couleur différentes deux à deux"

$$\mathrm{Card}(D) = 6(6^1 \times 4^1 \times 2^1) = 288$$

Pour ordonner les 3 couleurs dans un triplet on a 6 possibilités

(B ; N ; R) ; (B ; R ; N) ; (N ; B ; R) ; (N ; R ; B) ; (R ; N ; B) ; (R ; B ; N)

E" parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire"

L'événement contraire de E est $\overline{E}$ « parmi les boules tirées il n'y a pas de boule noire"

$$\mathrm{Card}(\overline{E}) = 8^3 = 512$$

On sait que $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(\Omega) - \mathrm{card}(\overline{E})$ donc $\mathrm{card}(E) = 1728 - 288 = 1216$

D'où $\mathrm{card}(E) = 1216$

G" parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge"

Pour ordonner la boule rouge dans un triplet on a 3 possibilités

$$\mathrm{Card}(G) = 3(2^1 \times 10^2) + 10^3 = 1600$$

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

## III – Arrangement sans répétition

### 1 - Définition

Soit E un ensemble fini, card(E) = n on pose $E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n\}$
Chaque élément $(a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_p)$ de $E^p$ où $(1 \leq p \leq n)$ sont différents deux à deux s'appelle un arrangement sans répétition d'ordre p de n éléments.

Exemple: $E = \{1, 2, 3, 4\}$
Les triplets (1,3,2) ; (1,4,2) ; (4,3,2) … sont des arrangements sans répétition d'ordre 3 de 4 éléments .
On ne peut pas avoir des arrangements sans répétition d'ordre 5 de 4 éléments

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

## 2 - Propriété

Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ le nombre des arrangements sans répétition d'ordre $p$ de $n$ éléments. $(p \leq n)$ est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$$

**Exercice**

Calculer les entiers suivant : $A_{10}^3$ ; $A_7^5$ et $A_4^4$

## 3 - Permutation

**Cas particulier :**

Si $p = n$ ; l'arrangements sans répétition d'ordre $n$ de $n$ éléments s'appelle une permutation d'ordre $n$

le nombre des permutation d'ordre $n$ est $A_n^n = n \times (n-1) \times \dots \times (n-n+1) = n \times (n-1) \times \dots .2 \times 1$

ce nombre entier naturel s'appelle $n$ **factoriel** ; on le note $n!$

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

## 4 - Exemple

Une urne contient: 6 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules rouges

On tire arbitrairement, successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

1) Quel est le nombre des cas possibles?
2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:

   A″ les 3 boules tirées sont blanches″

   B″ les 3 boules tirées sont de la même couleur″

   C″ les 3 boules tirées sont de couleurs différentes″

   D″ les 3 boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux″

   E″ parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire″

   F″ parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge″

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

## Solution:

6 B ; 4 N ; 2R

Tirage successif de 3 boules sans remise parmi 12

1) Quel est le nombre des cas possibles ?

$\mathbf{Card}(\Omega) = \mathbf{A}_{12}^{3} = 1320$ calculatrice 12 npr 3 = 1320

2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:

A "les 3 boules tirées sont blanches"

$\mathbf{Card}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_{6}^{3} = 120$

B" les 3 boules tirées sont de la même couleur"

$\mathbf{Card}(\mathbf{B}) = \mathbf{A}_{6}^{3} + \mathbf{A}_{4}^{3} = 144$

C" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"

L'événement contraire de C est $\overline{\mathbf{C}}$ « les 3 boules tirées sont de la même couleur»

Donc $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{B}$

On sait que $\mathbf{card}(\mathbf{C}) = \mathbf{card}(\Omega) - \mathbf{card}(\overline{\mathbf{C}})$ donc $\mathbf{card}(\mathbf{C}) = 1320 - 144 = 1176$

D'où $\mathbf{card}(\mathbf{C}) = 1176$

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

D" les 3 boules tirées sont de couleur différentes deux à deux"

$$Card(D) = 6(A_6^1 \times A_4^1 \times A_2^1) = 288$$

Pour ordonner les 3 couleurs dans un triplet on a 6 possibilités

(B ; N ; R) ; (B ; R ; N) ; (N ; B ; R) ; (N ; R ; B) ; (R ; N ; B) ; (R ; B ; N)

E" parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire"

L'événement contraire de E est $\overline{E}$ « parmi les boules tirées il n'y a pas de boule noire"

$$Card(\overline{E}) = A_8^3 = 336$$

On sait que $card(E) = card(\Omega) - card(\overline{E})$ donc $card(E) = 1320 - 336 = 984$

D'où $card(E) = 984$

G" parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge"

Pour ordonner la boule rouge dans un triplet on a 3 possibilités

$$Card(G) = 3(A_2^1 \times A_{10}^2) + A_{10}^3 = 1260$$

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

## VI – Les combinaisons

### 1 - Définition

Soit E un ensemble fini, card(E) = n tout sous ensemble A de E contenant p éléments (p ≤ n) s'appelle une combinaison d'ordre p de n éléments.

Dans un ensemble l'ordre d'écriture des éléments n'est pas important, $\{x,y,z\} = \{y,x,z\}$ ce qui n'est pas le cas pour les arrangements : $(x,y,z) \neq (y,x,z)$

### 2 - Propriété

Soit $E$ un ensemble fini, $card\ E = n$ le nombre de combinaisons d'ordre $p$ de $n$ éléments est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

**AHMED AGOUZAL**

# Dénombrement

## 3 - Propriétés

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels tels que $p \leq n$ :

① $A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$

② $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

③ $C_n^{n-p} = C_n^p$

④ $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

## 4 - Exemple

Une urne contient: 6 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules rouges
On tire arbitrairement, simultanément 3 boules de l'urne.

1) Quel est le nombre des cas possibles?
2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:
   A" les 3 boules tirées sont blanches"
   B" les 3 boules tirées sont de la même couleur"
   C" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"
   D" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux"
   E" parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire"
   G" parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge"

# Dénombrement

## Solution:

6 B ; 4 N ; 2R

Tirage simultané de 3 boules parmi 12

1) Quel est le nombre des cas possibles ?

$\mathbf{Card}(\Omega) = \mathbf{C}_{12}^{3} = 220$ calculatrice 12 ncr 3 = 220

2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:

A "les 3 boules tirées sont blanches"

$\mathbf{Card}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}_{6}^{3} = 20$

B" les 3 boules tirées sont de la même couleur"

$\mathbf{Card}(\mathbf{B}) = \mathbf{C}_{6}^{3} + \mathbf{C}_{4}^{3} = 24$

C" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"

L'événement contraire de C est $\overline{\mathbf{C}}$ « les 3 boules tirées sont de la même couleur»

Donc $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{B}$

On sait que $\mathbf{card}(\mathbf{C}) = \mathbf{card}(\Omega) - \mathbf{card}(\overline{\mathbf{C}})$ donc $\mathbf{card}(\mathbf{C}) = 220 - 24 = 196$

D'où $\mathbf{card}(\mathbf{C}) = 196$

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

D" les 3 boules tirées sont de couleur différentes deux à deux"

$$Card(D) = C_6^1 \times C_4^1 \times C_2^1 = 48$$

E" parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire"

L'événement contraire de E est $\overline{E}$ « parmi les boules tirées il n'y a pas de boule noire"

$$Card(\overline{E}) = C_8^3 = 56$$

On sait que $card(E) = card(\Omega) - card(\overline{E})$ donc $card(E) = 220 - 56 = 164$

D'où $card(E) = 164$

G" parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge"

$$Card(G) = C_2^1 \times C_{10}^2) + C_{10}^3 = 210$$

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

## V - Formule de binôme de Newton

$a \in \mathbb{R}$ **et** $b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

ce qui peut également être noté :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

<u>Exemple</u> :Développer $(1 + x)^5$ et $(1 - x)^5$ à l'aide de la formule du binôme.

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

## Triangle de Pascal

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \qquad \text{(formule de Pascal)}$$

| n \ p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

AHMED AGOUZAL

# Dénombrement

## Tirage

**Successif avec remise**

$$n^p$$

Ordre important

**Successif sans remise**

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Ordre important

**Simultané**

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

Ordre pas important

AHMED AGOUZAL