

Exercices avec solutions : Le produit vectoriel

PROF : ATMANI NAJIB

2BAC série science expérimental filière : svt+pc

## Le PRODUIT VECTORIEL

**Exercice1:**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\|=1 \text{ et } \|\vec{v}\|=3 \text{ et } (\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$$

Calculer :  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

**Solution :**

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta = 1 \cdot 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

**Exercice2:** dans l'espace muni d'un repère orthonormé directe  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  on considère les vecteurs :  $\vec{u}(1; 1; 1)$  et  $\vec{v}(2; 1; 2)$

Calculer :  $\vec{u} \wedge \vec{v}$

**Solution :**

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 0 \vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

**Exercice3:**  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  et  $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

Calculer :  $\vec{u} \wedge \vec{v}$

**Solution :**

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{j} - 8\vec{k}$$

**Exercice4:** dans l'espace muni d'un repère orthonormé directe  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  on considère les points  $A(0; 1; 2)$  et  $B(1; 1; 0)$  et  $C(1; 0; 1)$

1) Déterminer les coordonnées du vecteur  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  et vérifier que les points A et B et C sont non alignés

2) Calculer la surface du triangle  $ABC$

3) Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$

**Solution :1)**  $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

$\vec{AB}(1; 0; -2)$  et  $\vec{AC}(1; -1; -1)$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$  Donc les points A et B et C sont non alignés

$$2) S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Donc : } S_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

3)  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$  un vecteur normal du plan  $ABC$

Donc une équation cartésienne du plan  $ABC$  est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC}(-2; -1; -1) \text{ donc } a = -2 \text{ et } b = -1 \text{ et } c = -1$$

$$\text{Donc : } -2x - 1y - 1z + d = 0 \text{ (ABC)}$$

$$\text{Et on a : } A(0; 1; 2) \in (P) \text{ donc : } 0 - 1 - 2 + d = 0$$

$$\text{donc } d = 3$$

$$\text{Donc (ABC) : } -2x - 1y - 1z + 3 = 0$$

$$\text{Donc (ABC) : } 2x + y + z - 3 = 0$$

**Exercice5** L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Quelle est l'intersection des plans d'équations respectives

$$(P) x - y + 2z + 1 = 0 \text{ et } (P') 2x + y - z + 2 = 0$$

**Solution :**  $\vec{n}(1; -1; 2)$  et  $\vec{n}'(2; 1; -1)$  deux vecteurs normaux respectivement de  $(P)$  et  $(P)'$

$$\text{On a : } \vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\text{Donc : } \vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}' = -\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k} \neq \vec{0}$$

les plans  $(P)$  et  $(P)'$  sont sécants suivant une droite  $(D)$

et  $\vec{u}(-1; 5; 3)$  est un vecteur directeur de  $(D)$

et la droite  $(D)$  passe par  $A(-1; 5; 3)$  (il suffit de donner par exemple  $z = 0$  et résoudre le système et calculer  $x$  et  $y$ )

Donc : une représentation paramétrique de

$$(D) \text{ est } (D) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

**Exercice6 :** L'espace est muni d'un repère orthonormé. Calculer la distance du point  $M(-1;0;1)$  à la droite  $(D)$  dont une représentation paramétrique est :  $(D)$ :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

**Solution :** la droite  $(D)$  passe par :  $A(1;-1;0)$

et  $\vec{u}(2;-1;2)$  est un vecteur directeur de  $(D)$

et  $\overrightarrow{AM}(-2;1;1)$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$$

Donc :  $\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$  et  $\|\vec{u}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$

$$\text{Donc : } d(M;(D)) = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$$

**Exercice7** soit ABCDEFGH un cube dans L'espace orienté muni d'un repère orthonormé directe  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE})$

Soit I milieu du segment  $[EF]$  et K centre de gravité du carré ADHE

1)a) Montrer que  $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

b) En déduire la surface du triangle IGA

2) on suppose que ABCD est un quadrilatère convexe de diagonales qui se coupent en T et soit  $\Omega$  un point tel que :  $\overrightarrow{D\Omega} = \overrightarrow{BT}$

2)a) comparer les distances :  $BD$  et  $\Omega T$  et comparer la surface des triangles  $ABD$  et  $A\Omega T$

2)b) Montrer que  $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices*

*Que l'on devient un mathématicien*

