

Année scolaire : 2022 – 2023	Résumé de géométrie analytique dans L'espace	AGOUZAL 2 BPCF
------------------------------	---	-------------------

Dans tout ce qui va suivre, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Produit scalaire Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs et $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ de l'espace. $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \ \vec{u}\ = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$	Equation du plan tangent à une sphère en un point Le plan (T) tangent à la sphère $S(\Omega, R)$ en un point A $M(x, y, z) \in (T) \Leftrightarrow \vec{AO} \cdot \vec{AM} = 0$ * Intersection d'une sphère et d'une droite Soient (S) la sphère de centre Ω et de rayon R, (Δ) une droite de l'espace et H le projeté orthogonal du point Ω sur la droite (Δ). On pose $d = \Omega H$ $d = d(\Omega, (\Delta))$
Un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme, $ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$ $M(x, y, z) \in P(A; \vec{n}) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$	Si $d > R$, alors $(P) \cap (S) = \emptyset$ Si $d = R$, alors $(P) \cap (S) = \{H\}$ (Δ) est tangent à (S) en H Si $d < R$, alors la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.
La distance du point $A(x_A, y_A, z_A)$ au plan (P) d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est : $d(A, (P)) = \frac{ ax_A + by_A + cz_A + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$	Pour déterminer les coordonnées des deux points ou de H (résoudre le système d'équation la sphère (S) et d'une représentation paramétrique de la droite (Δ))
La sphère	Produit vectoriel
Soit $S(\Omega, R)$ la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R L'équation cartésienne de la sphère $S(\Omega, R)$ est : $M(x, y, z) \in S(\Omega, R) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$	Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace Les coordonnées du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$: $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} y & y' \\ z & z' \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} x & x' \\ z & z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$
Soit (S) la sphère définie par l'un de ces diamètres [AB] avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ $M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$ d'équation cartésienne $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$	Le plan (ABC) définie par A, B et C non alignés $M(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$
Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } a, b, c \text{ et } d \text{ sont des réels.}$ Si $a^2 + b^2 + c^2 - 4d \geq 0$ (S) est la sphère de centre $\Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}) \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2}$	A, B et C ne sont pas alignés $\Leftrightarrow \vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$ La distance du point A à la droite $\Delta(A, \vec{u})$ $d(A, (\Delta)) = \frac{\ \vec{AB} \wedge \vec{u}\ }{\ \vec{u}\ }$
* Intersection d'une sphère et d'un plan Soit $S(\Omega, R)$ la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R H le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (P). On pose $d = d(\Omega, (P))$	La surface du triangle ABC et de parallélogramme ABCD $S_{ABC} = \frac{1}{2} \ \vec{AB} \wedge \vec{AC}\ \quad S_{ABCD} = \ \vec{AB} \wedge \vec{AC}\ $
Si $d > R$, alors $(P) \cap (S) = \emptyset$	(P) et (P') deux plans dans l'espace $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ deux vecteurs normaux respectivement à (P) et (P') 1) $(P) \perp (P') \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$ 2) $(P) // (P') \Leftrightarrow \vec{n} \wedge \vec{n'} = \vec{0}$ 3) $\vec{n} \wedge \vec{n'} \neq \vec{0} \Leftrightarrow (P) \cap (P') = D(\vec{n} \wedge \vec{n'})$ $\vec{n} \wedge \vec{n'}$ est un vecteur directeur de la droite (D) 4) $(P) \perp D'(\vec{u}) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D') 5) $(P) // D'(\vec{u}) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$
Si $d = R$, alors $(P) \cap (S) = \{H\}$ (P) est tangent à (S)	
Si $d < R$, alors $(P) \cap (S) = (\Gamma)$ (Γ) est le cercle de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$ et de centre H. Pour déterminer les coordonnées de H (résoudre le système d'équation du plan (P) et une représentation paramétrique de la droite passant par Ω et orthogonale à (P))	